I. MECHANIKA

9. Mechanika tekutin

Obsah

- Tekutina – kapalina a plyn
- Hydrostatika, rovnováha tekutin
- Pascalův zákon. Hydraulika
- Hydrostatický tlak. Hydrostatické paradoxon
- Archimédův zákon
- Hydrodynamika. Proudění ideální tekutiny
- Rovnice kontinuity
- Eulerova hydrodynamická rovnice
- Bernoulliova rovnice. Hydrodynamické paradoxon
- Proudění viskózní kapaliny. Navierova-Stokesova rovnice
- Newtonovská tekutina. Druhá viskozita
- Parabolický zákon rozdělení rychlostí. Hagenův-Poiseuillův zákon
- Laminární a turbulentní proudění
- Reynoldsovo číslo. Strouhalovo číslo

Tekutina – kapalina a plyn

tekutina

- struktura odlišná od pevných látek (chybí uspořádání na dlouhou vzdálenost)
- molekuly nejsou vázány na pevné rovnovážné polohy, nýbrž se mohou volně posouvat – nejsou tvarově stálé

dokonalá (ideální) tekutina (dokonalá kapalina i dokonalý plyn)

- homogenní – všude stejné vlastnosti
- napětí $\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p$
- nenulová jen normálová napětí – tlak
- nulová smyková napětí – neexistuje vnitřní tření
- $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ při nenulové deformaci $\Rightarrow$ nulový modul pružnosti ve smyku

Tekutina – kapalina a plyn

dokonalá (ideální) kapalina

- hustota konstantní $\rho = \text{konst.}$
- $\Rightarrow$ dokonalá kapalina má stálý objem – vytváří volnou hladinu
- $\Rightarrow$ dokonalá kapalina nestlačitelná
- $\Rightarrow$ první invariant tenzoru deformace $e_I = 0$
- $\Rightarrow$ modul objemové pružnosti K nekonečný (protože platí $p = Ke_I$)
- idealizace – skutečná stlačitelnost kapalin větší než u pevných látek, zde ale výrazný kontrast mezi stlačitelností a malým odporem vůči tvarovým změnám

dokonalý plyn

- rozpínavý – vyplní celý uzavřený prostor – nevytváří volnou hladinu
- libovolně stlačitelný

barotropní plyn

- hustota je jen funkcí tlaku (reálný plyn - přibližně splněno jen pro malé změny)

Mechanika tekutin

základním úkolem mechaniky tekutin je určit

- tlak
- hustotu
- rychlost proudění

jako funkci polohy případně času

Hydrostatika. Rovnováha tekutin

dosazením do rovnice rovnováhy za tlak

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(-\delta_{ji} p)}{\partial x_j} + G_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = G_i \quad \text{též} \quad \operatorname{grad} p = \vec{G}$$

- rovnice hydrostatické rovnováhy (RHR)
- $\Rightarrow$ interpretace: tlak roste ve směru objemové síly
  - tlak má charakter potenciálu objemové síly
  - rozložení tlaku odpovídající RHR se může ustavit, jen pokud objemová síla je konzervativní (tj. lze ji vyjádřit jako gradient nějakého potenciálu)
- hustota objemové síly v tekutině úměrná hustotě tekutiny
- v homogenním tíhovém poli platí $\vec{G} = \rho \vec{g}$
- v (dokonalé) kapalině pravá strana rovnice rovnováhy $\operatorname{grad} p = \rho \vec{g}$ parametrem řešení, lze ji stanovit předem
- v plynu $\rho = \rho(p) \Rightarrow$ užije se intenzita objemové síly $\vec{I} = \frac{\vec{G}}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \vec{I}$
- nezávislá formulace rovnice hydrostatické rovnováhy (RHR)

Pascalův zákon

- dokonalá kapalina ($\rho = \text{konst.}$) $\Rightarrow$ $\mathrm{grad}\, p = \mathbf{konst.}$ $\Rightarrow$ derivace $\dfrac{\partial p}{\partial x_i}$ jsou konstanty
- řešením RHR získáme rozložení tlaku až na aditivní konstantu (je-li fce $p_1 = p_1(x_i)$ řešením RHR, pak $p_2(x_i) = p_1(x_i) + k$ je také řešením)
- aditivní konstanty se určují z okrajových podmínek (pro určení jediné konstanty k stačí znalost tlaku v jediném libovolném bodě kapaliny)
- změna tlaku $p \to p + \Delta p$ v jednom bodě vede na změnu konstanty $k \to k + \Delta p$ a tím také na změnu tlaku $p \to p + \Delta p$ v každém bodě kapaliny

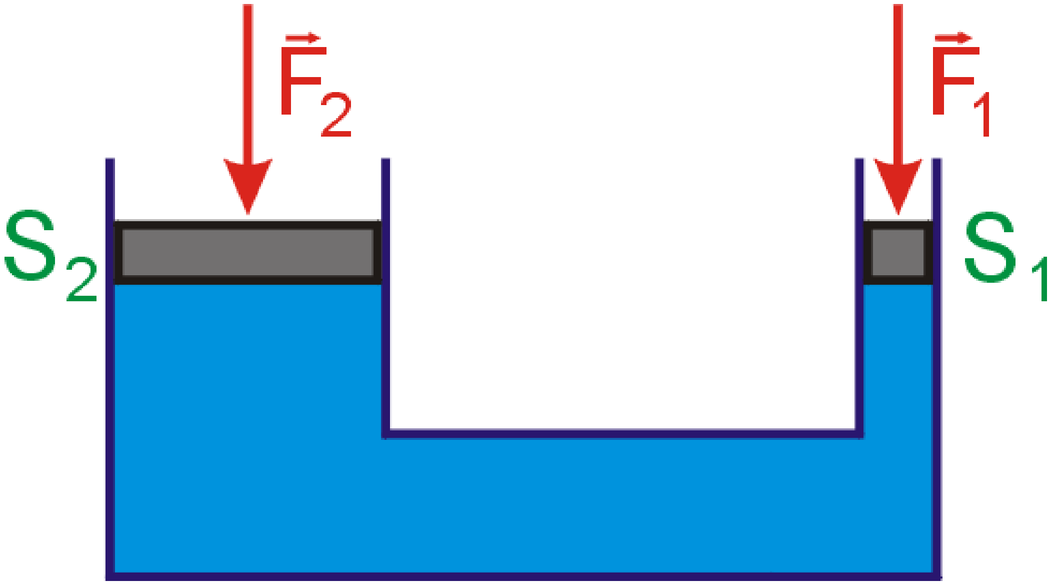
Pascalův zákon o všestranném šíření tlaku: Změna tlaku v jednom místě kapaliny způsobí stejnou změnu tlaku v celém objemu kapaliny.

- Elementární formulace Pascalova zákona: $\vec{G} = 0 \Rightarrow \mathrm{grad}\, p = 0 \Rightarrow p(\vec{r}) = \text{konst.}$

Pokud na tekutinu nepůsobí objemové síly, tlak v tekutině je všude stejný.

Pascalův zákon. Hydraulika

- hydraulická zařízení – brzdy, lisy, zvedáky i točivá zařízení
- velké tlaky – možno zanedbat objemové síly
- přenos síly, převod síly
- $\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}$ (vykonané práce stejné $F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2$)



Hydrostatický tlak

- řešení RHR pro dokonalou kapalinu ($\rho = \text{konst.}$) v homogenním tíhovém poli
- první osa souřadnicového systému orientována dolů, počátek na volné hladině kapaliny, budeme značit $h \equiv x_1$
- na volnou hladinu působí barometrický tlak b
- $\operatorname{grad} p = \rho \vec{g}$ a $\vec{g} = (g,0,0)$ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial h} = \rho g \Rightarrow p = \rho g h + C \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = p(h) \end{cases}$
- okrajová podmínka $p(h=0) = b = \rho g.0 + C \Rightarrow C = b \Rightarrow p = \rho g h + b$
- rovnice pro hydrostatický tlak v kapalině
- často nás zajímá rozdíl tlaků na úrovni hladiny a ve hloubce h : $\Delta p = p - b = \rho g h$

Barometrická rovnice

- řešení RHR pro ideální plyn ($pV = nRT$) v homogenním tíhovém poli
- závislost hustoty ideálního plynu na tlaku p, teplotě T a molární hmotnosti M_m

$$n = \frac{m}{M_m} = \frac{\rho V}{M_m} \to pV = \frac{\rho V}{M_m} RT \to \boxed{\rho = \frac{pM_m}{RT}}$$

- první osa souřadnicového systému orientována nahoru, budeme značit $h \equiv x_1$

- $\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \vec{g}$ a $\vec{g} = (-g,0,0)$ $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial h} = \frac{RT}{pM_m}\frac{\partial p}{\partial h} = -g \\ \left. \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \right\} \Rightarrow p = p(h) \end{array} \right\} \frac{dp}{p} = -\frac{M_m g}{RT} dh$

$$\to \text{integrace } \int \frac{dp}{p} = -\frac{M_m g}{RT} \int dh \to \ln p = -\frac{M_m g}{RT} h + C \to p = \exp\left(-\frac{M_m g}{RT} h + C \right)$$

- okrajová podmínka $p(h=0) = p_0 = e^C \Rightarrow$ $\boxed{p = p_0 \exp\left(-\frac{M_m g}{RT} h \right)}$

- rovnice pro barometrický tlak v <u>izotermické</u> atmosféře ($T =$ konst.)

Kapalina v rotující nádobě

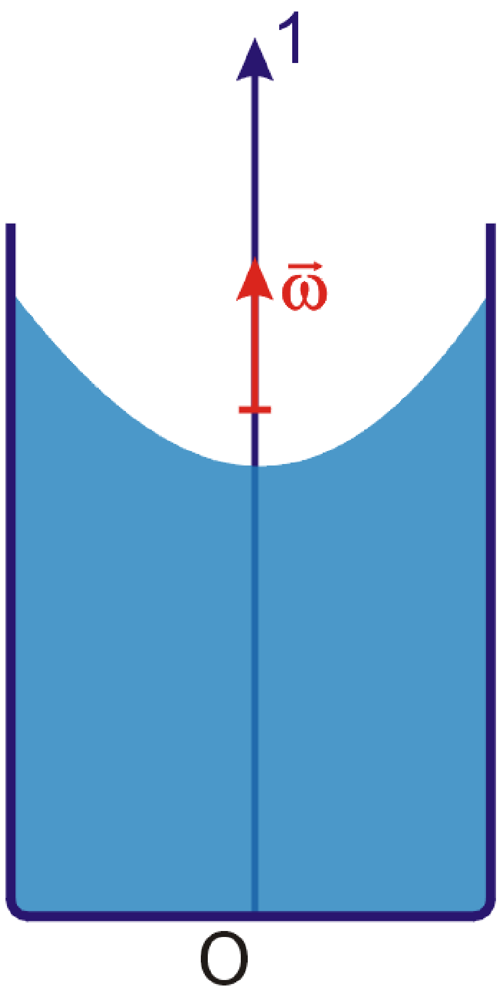
objemová síla

- tíhová síla
- odstředivá síla

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \rho g \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \rho\omega^2 x_2 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \rho\omega^2 x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = \rho g x_1 + \frac{1}{2}\rho\omega^2(x_2^2 + x_3^2) + k$$

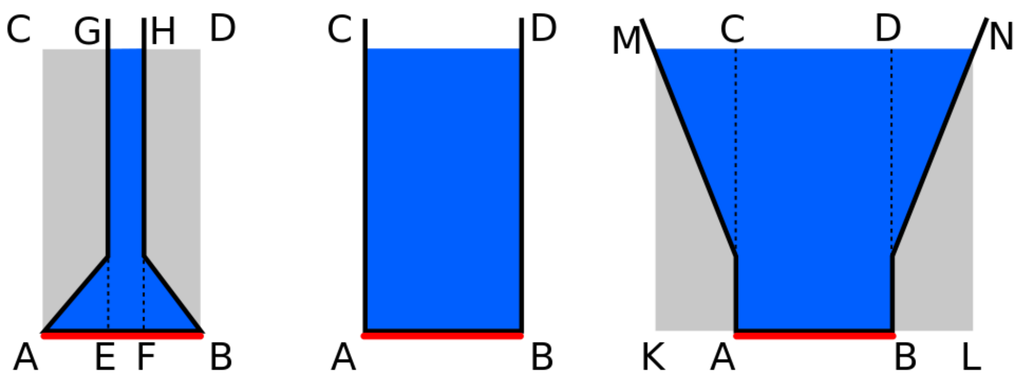
plocha konstantního tlaku $p = K$

$$x_1 = \frac{-\omega^2}{g}(x_2^2 + x_3^2) + \frac{K-k}{\rho g}$$

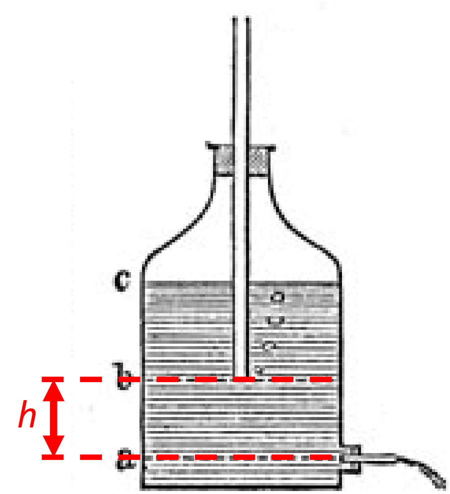


Hydrostatické paradoxon. Mariottova láhev

- tlak nezávisí na množství kapaliny nad plochou, kde se měří hydrostatický tlak



- **Mariottova láhev**
  - Edme Mariotte (Francouz, 1620-1684)
  - tlak na výstupu nezávisí na množství kapaliny v nádobě
  - hydrostatický tlak určen výškovou odlehlostí *h* výstupní trubice a konce zavzdušňovací trubice



Archimédův zákon

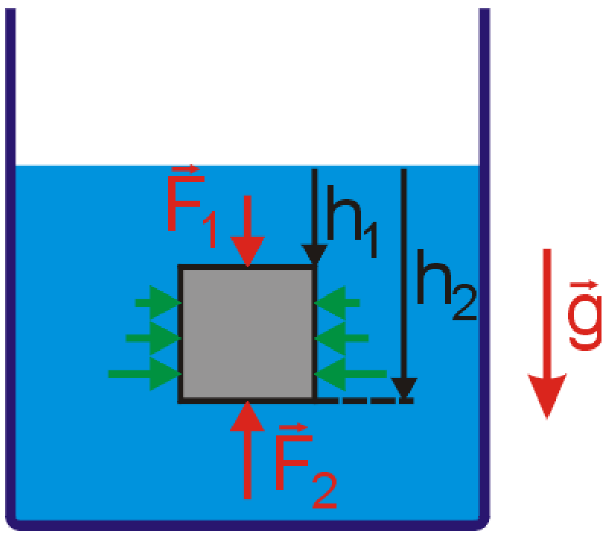
- myšlenkově vymezíme libovolný objem v kontinuu
- v rovnováze se výslednice objemových a plošných rovná nule $F_i^V + F_i^P = 0$
- objemové síly působící na vymezený objem $F_i^V = \int_V G_i dV$
- objemovou sílu tvoří jen tíhová síla (první osa orientována směrem dolů) $\begin{cases} F_1^V = g\int_V \rho dV \\ F_2^V = F_3^V = 0 \end{cases}$
- okolí působí na vymezený objem na jeho hranici plošnou silou $F_i^P = \int_S T_i^{\nu} dS$
- z rovnováhy plyne, že okolí působí na hranici myšleného

  objemu směrem vzhůru plošnou silou $\begin{cases} F_1^P = -g\int_V \rho dV \\ F_2^P = F_3^P = 0 \end{cases}$
- když bude objem V vyplněn pevným tělesem, budou na hranici působit stejné plošné síly, jako kdyby byl vyplněn kontinuem – bude tedy na něj směrem vzhůru působit síla velikosti $g\int_V \rho dV$, což představuje tíhu stejného objemu kontinua, jako je objem ponořeného tělesa
- Archimédův zákon: Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která je rovna tíze tekutiny tělesem vytlačené.

Archimédův zákon

Elementární důkaz:

- založen na speciální volbě tvaru tělesa
- válec výšky $h = h_2 - h_1$ s podstavami plochy S
- síly působící na boční stěny jsou díky symetrii vzájemně kompenzovány
- mezi horní a dolní podstavou rozdíl hydrostatického tlaku $\rho g h$
- rozdíl tlakových sil $F_2 - F_1 = \rho g h S$ působí směrem vzhůru a je roven tíze kapaliny vytlačené válcem.



- Archimédův zákon platí pro všechny tekutiny včetně plynů.
- podle poměru hustot kapaliny a ponořeného tělesa
  - těleso plave (část tělesa se zvedá nad hladinu, tím se vztlaková síla zmenšuje, dokud se nevytvoří rovnováha mezi vztlakovou a tíhovou silou)
  - těleso se vznáší
  - těleso klesá ke dnu

Proudění tekutin. Vliv smykového napětí

tekutina v rovnováze

- bez pohybu neexistují smyková napětí (platí i pro viskózní tekutiny), všechna napětí normálová
- libovolná změna tvaru tekutiny $\rightarrow$ pohyb (proudění) tekutiny
- v případě viskózní tekutiny existují smyková napětí , ale nikdy nejsou takového charakteru, aby se trvale udržela – jen brzdí pohyb tekutiny

proudění tekutiny

- smyková napětí – pouze při pohybu viskózní tekutiny
- při vyšších rychlostech způsobují smyková napětí vznik chaotického proudění a promíchávání tekutiny, vytváření vírů

Klasifikace proudění tekutin

laminární proudění

- rychlost se od místa k místu mění „hladce“, nedochází k mísení tekutiny
- lze zapsat $\vec{v} = f(x_i, t)$, tj. rychlost tekutiny lze popsat vektorovým polem
- rychlosti lze dobře zobrazit pomocí proudnic

stacionární proudění (ustálené proudění)

- v každém bodě prostoru platí, že rychlost tekutiny se nemění s časem, tj. $\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{x_i} = 0$
- vektorové pole rychlosti nezávisí na čase, tj. $\vec{v} = f(x_i)$
- proudnice splývají s trajektoriemi částic

turbulentní proudění

- existuje nad určitou kritickou rychlostí reálné kapaliny
- smyková napětí $\rightarrow$ chaotické proudění a promíchávání tekutiny, vytváří se víry
- rychlosti částic se nepravidelně mění v prostoru i v čase
- proudnice se buď nepravidelně mění anebo je nelze zobrazit
- vždy **nestacionární**

Vířivé a potenciálové proudění

vírové proudění (vířivé proudění)

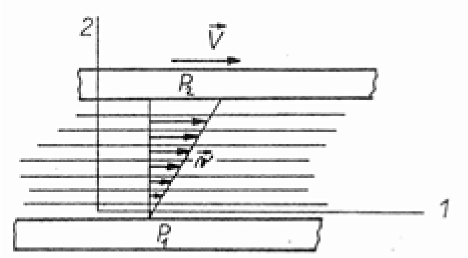
- pohyb částic tekutiny po obecné kruhové dráze ($\mathrm{rot}\,\vec{v} \neq 0$)
- rychlost se lokálně mění

nevírové proudění (potenciálové proudění)

- $\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \mathrm{grad}\,\varphi \;\; (\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0)$
- znalost rychlostního potenciálu $\varphi(x_i, t)$ stačí pro stanovení $\vec{v}(x_i, t)$ a určení proudnic

Povšimněme si, že podmínka $\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$ je hodně přísná:

- např. v Couettově proudění je nenulová derivace $\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}$
- $\Rightarrow$ Couettovo proudění je vírové (rychlostní potenciál neexistuje)



Hydrodynamika. Laminární proudění

proudnice (proudočáry)

- zobrazení vektorového pole rychlostí
- tečny k proudnicím mají směr rychlosti částic – proudnice se neprotínají
- každým bodem kontinua prochází v daném čase právě jedna proudnice

zobrazení proudnic v daném čase

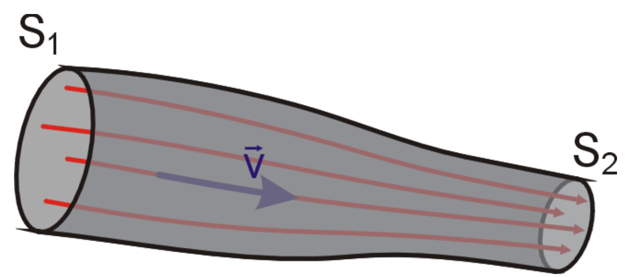
- rychlost různých částic v určitém okamžiku
    - stacionární proudění – proudnice se nemění v čase
    - nestacionární proudění – proudnice se mění s časem
- hustota proudnic – úměrná rychlosti proudění

proudová trubice – plášť tvořen proudnicemi (plochou neprotéká žádný tok)

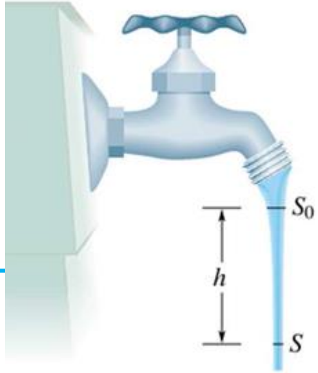
proudové vlákno – hmotný vnitřek proudové trubice

trajektorie

- dráha 1 určité částice
- pouze při ustáleném proudění splývají trajektorie s proudnicemi

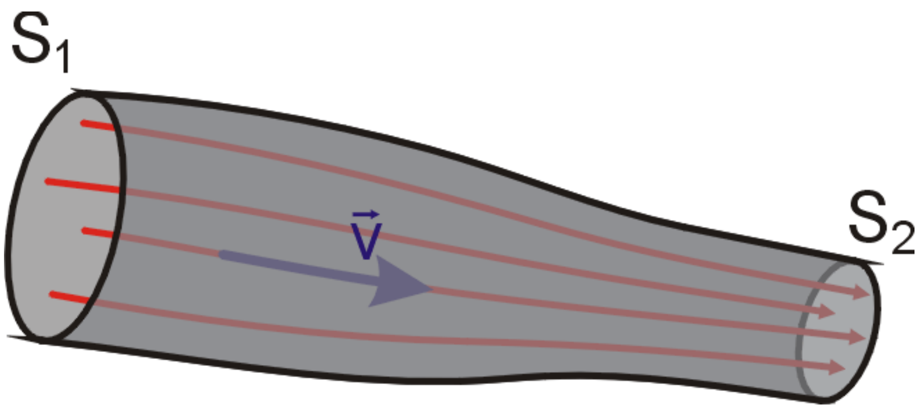


Rovnice kontinuity



Elementární odvození

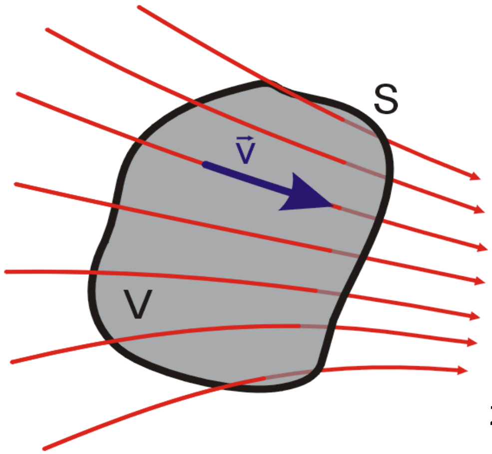
- stacionární proudění
- trubice – reálná, myšlená proudová trubice
- průřezem S_1 kolmým ke směru rychlosti v_1 za čas Δt vteče $\Delta m_1 = S_1 v_1 \rho_1 \Delta t$
- průřezem S_2 kolmým ke směru rychlosti v_2 za čas Δt vyteče $\Delta m_2 = S_2 v_2 \rho_2 \Delta t$
- hodnoty rychlosti v_1 a v_2 a hustoty ρ_1 a ρ_2 jsou průměrné veličiny v místech průřezů S_1 a S_2; v ustáleném proudění jde o konstantní hodnoty
- hustota v určitém místě trubice se také s časem nemění
- pak celková hmotnost tekutiny v trubici zůstává konstantní $\Rightarrow$
  $\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow$
- rovnice kontinuity pro stacionární proudění tekutiny v trubici
  $S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2$



- pro kapalinu navíc
  $\rho_1 = \rho_2 = \rho =$ konst. $\Rightarrow$
- rovnice kontinuity pro stacionární proudění kapaliny v trubici $S_1 v_1 = S_2 v_2$ vzhledem k nestlačitelnosti platí i pro nestacionární proudění

Obecný tvar rovnice kontinuity

- zavedeme veličinu hmotnostní tok $q_m = \frac{dm_S}{dt}$ jako hmotnost tekutiny, která za jednotku času vyteče z objemu vymezeného uzavřenou plochou S
- analogie s tokem vektorového pole zavedeným v souvislosti s gravitačním polem
- za dobu dt proteče ploškou velikosti dS, jejíž směr normály označíme $\vec{n}$, objem tekutiny $dV_m = \vec{v} \cdot \vec{n} dS\, dt$
- elementární hmotnostní tok dq_m ploškou dS $\qquad dq_m = \rho \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{n} dS}_{\frac{dV_m}{dt}}$
- hmotnostní tok celou plochou S ohraničující objem V $\qquad q_m = \oiint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$
- v případě uzavřené plochy vektor $\vec{n}$ označuje její vnější normálu, v souladu s tím kladná hodnota toku q_m znamená, že hmotnost uvnitř plochy se zmenšuje



Obecný tvar rovnice kontinuity

- časová změna hmotnosti uzavřeného objemu V $$\frac{dm_V}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho dV$$
- tekutina buď odteče nebo zůstane, hmotnost se zachová $$\frac{\partial m_S}{\partial t} + \frac{\partial m_V}{\partial t} = 0$$
- dosazením integrální tvar rovnice kontinuity $$\oiint\limits_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho dV$$
- připomeňme Gaussovu větu $$\oiint\limits_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint\limits_V \mathrm{div}\,\vec{A}\, dV$$
- dosazením do levé strany $$\iiint\limits_V \mathrm{div}\,\rho \vec{v}\; dV = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho dV$$
- hranice objemu nezávisí na čase $$\iiint\limits_V \mathrm{div}\,\rho \vec{v}\; dV = -\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$
- převedeme na jednu stranu rovnice $$\iiint\limits_V \left(\mathrm{div}\,\rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV = 0$$
- objem V zvolen libovolně $\Rightarrow$ v každém bodě musí platit $$\mathrm{div}\,\rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$
- obecná formulace rovnice kontinuity proudění (stlačitelné) tekutiny
- RK musí být splněna v každém bodě prostoru vyplněného kontinuem

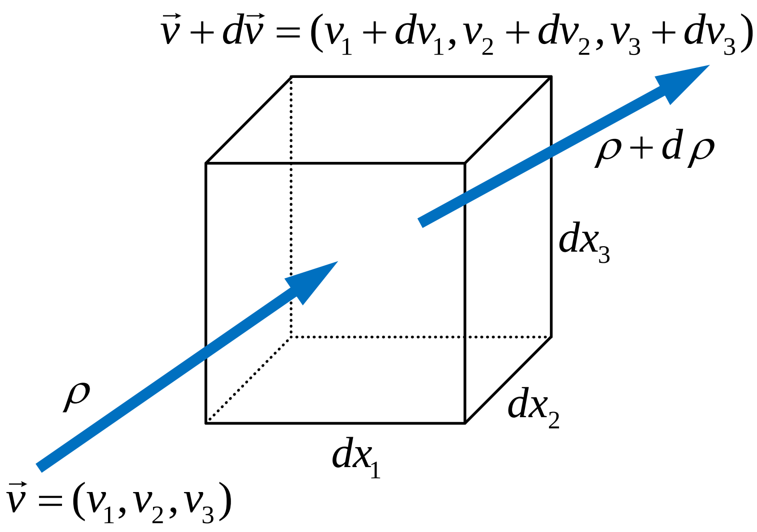
Rovnice kontinuity pro kapalinu

- obecný tvar RK $$\mathrm{div}\,\rho\vec{v} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

RK pro kapalinu

- nestlačitená tekutina $\rho = \text{konst.}$
- RK pro kapalinu $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

Co vyjadřuje operátor divergence?



- uvažujme jediný elementární objem $dx_1 dx_2 dx_3$ protékaný elementem tekutiny
- tekutina vtéká rychlostí $\vec{v}$ při hustotě ρ a vytéká rychlostí $\vec{v} + d\vec{v}$ při hustotě $\rho + d\rho$
- změna hustoty $d\rho$ a rychlosti $d\vec{v}$ je důsledkem změny polohy elementu tekutiny
- ploškou $dx_1 dx_2$ za čas Δt vteče tekutina hmotnosti $\Delta m_{in12} = dx_1 dx_2 v_3 \; \rho \Delta t$ a protilehlou ploškou vyteče tekutina hmotnosti $\Delta m_{out12} = dx_1 dx_2 (v_3 + dv_3)(\rho + d\rho)\Delta t$
- zkoumáme časovou změnu hustoty, tj. rozdíl vstupující a vystupující hmotnosti děleno objemem

$$-\Delta\rho = \frac{m_{out} - m_{in}}{dx_1 dx_2 dx_3} = \frac{dx_1 dx_2 \left[(v_3 + dv_3)(\rho + d\rho) - v_3 \rho\right]}{dx_1 dx_2 dx_3} \Delta t +$$

- vyjádříme změnu hustoty

$$\frac{dx_2 dx_3 \left[(v_1 + dv_1)(\rho + d\rho) - v_1 \rho\right]}{dx_1 dx_2 dx_3} \Delta t +$$

$$\frac{dx_1 dx_3 \left[(v_2 + dv_2)(\rho + d\rho) - v_2 \rho\right]}{dx_1 dx_2 dx_3} \Delta t$$

Co vyjadřuje operátor divergence?

$$-\Delta\rho = \frac{m_{out} - m_{in}}{dx_1 dx_2 dx_3} = \frac{dx_1 dx_2 \left[(v_3 + dv_3)(\rho + d\rho) - v_3\rho\right]}{dx_1 dx_2 dx_3}\Delta t + \frac{dx_2 dx_3 \left[(v_1 + dv_1)(\rho + d\rho) - v_1\rho\right]}{dx_1 dx_2 dx_3}\Delta t + \frac{dx_1 dx_3 \left[(v_2 + dv_2)(\rho + d\rho) - v_2\rho\right]}{dx_1 dx_2 dx_3}\Delta t$$

- pro znaménko změny hustoty musí platit $m_{out} > m_{in} \Rightarrow \Delta\rho < 0$
- víme $(v + dv)(\rho + d\rho) = v\rho + v d\rho + \rho dv + \overbrace{dv d\rho}^{\sim 0} = v\rho + d(v\rho)$
- proto platí $-\Delta\rho = \dfrac{v_3\rho + d(v_3\rho) - v_3\rho}{dx_3}\Delta t + \dfrac{v_1\rho + d(v_1\rho) - v_1\rho}{dx_1}\Delta t + \dfrac{v_2\rho + d(v_2\rho) - v_2\rho}{dx_2}\Delta t$
- připomeňme definici $\operatorname{div}\vec{A} = \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_3}$
- proto $-\Delta\rho = \left[\dfrac{d(v_1\rho)}{dx_1} + \dfrac{d(v_2\rho)}{dx_2} + \dfrac{d(v_3\rho)}{dx_3}\right]\Delta t = \operatorname{div}(\vec{v}\rho)\Delta t$
- rovnici $-\Delta\rho = \operatorname{div}(\vec{v}\rho)\Delta t$ přepišme do tvaru $\dfrac{\Delta\rho}{\Delta t} = -\operatorname{div}(\vec{v}\rho)$
- protože zlomek na levé straně vyjadřuje časovou změnu hustoty kapaliny $\rho = \rho(x_i, t)$ v <u>pevném</u> bodě prostoru, můžeme ho v limitním přechodu $\Delta t \to 0$ nahradit parciální derivací $\dfrac{\Delta\rho}{\Delta t} \to \dfrac{\partial\rho}{\partial t}$
- výsledkem je rovnice kontinuity (RK) pro tekutinu $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}\rho) = 0$

Rovnice kontinuity pro element v pohybu

sledujeme element tekutiny v průběhu pohybu

- hustota tekutiny je funkcí souřadnic a času $\rho = \rho(x_i, t)$
- funkce $x_i = x_i(t)$ popisují pohyb elementu kontinua $\Rightarrow$ $\rho = \rho(x_i(t), t) = \rho(t)$
- časová změna hustoty pohybujícího se elementu $$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{v_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

rovnice kontinuity pro pohybující se element

- vyjdeme z obecného tvaru RK $$\operatorname{div} \rho\vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$
- zapišme divergenci pomocí derivací $$\frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_i + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$
- derivujeme jako součin $$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$
- přerovnáme členy $$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\frac{d\rho}{dt}} = 0$$
- RK pro pohybující se element stlačitelné tekutiny $$\rho \operatorname{div} \vec{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Eulerova hydrodynamická rovnice

- obecná pohybová rovnice kontinua $$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$
- napětí v ideální tekutině vyjádříme pomocí tlaku $$\sigma_{ji} = -\delta_{ji} p$$
- zrychlení elementu jako totální derivaci rychlosti $$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \to \frac{dv_i}{dt}$$
- hustota objemové síly pomocí intenzity $$G_i = \rho I_i$$
- pohybová rovnice elementu tekutiny $$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho I_i = \rho \frac{dv_i}{dt}$$
- upraveno $$\frac{dv_i}{dt} = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$
- rychlost elementu tekutiny je funkcí souřadnic a času $$v_i = v_i(x_i, t)$$
- funkce $x_i = x_i(t)$ popisují pohyb elementu kontinua $\Rightarrow$ $$v_i = v_i(x_i(t), t) = v_i(t)$$
- časová změna rychlosti pohybujícího se elementu $$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}$$
- dosazením Eulerova hydrodynamická rovnice $$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Eulerova hydrodynamická rovnice

- Eulerova hydrodynamická rovnice $$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$
- EHR představuje pohybovou rovnici pro element ideální tekutiny ve tvaru $a = \frac{F}{m}$
    - na levé straně je celkové zrychlení, tj. změna rychlosti zahrnující časovou změnu rychlosti a změnu rychlosti odvozenou od pohybu elementu
    - na pravé straně je intenzita síly působící na element

výpočet pohybu elementu tekutiny

- EHR + RK + $\rho = \rho(p)$ - 5 rovnic pro 5 funkcí v_i, p a ρ
- principiálně možné, obecně velmi obtížné
- v případě kapaliny se zjednoduší na 4 rovnice pro 4 funkce

Odvození Bernoulliovy rovnice

Zjednodušující předpoklad:

- stacionární proudění $\Rightarrow$ proudnice se s časem nemění $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial v_i}{\partial t} = 0$

  $\Rightarrow$ proudnice splývají s trajektoriemi elementů tekutiny

- EHR (3 složky) přejde do tvaru $v_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_i}$

Připomeňme:

- EHR je vektorová rovnice pro intenzitu síly
- pokud vektory na obou stranách vynásobíme skalárně elementárním posunutím dx_i elementu ve směru proudnice, získáme rovnici, jejíž levá strana vyjadřuje elementární změnu kinetické energie a pravá strana změnu energie potenciální (přepočteno na jednotkovou hmotnost elementu)

$$\boxed{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_i} = \boxed{I_i\, dx_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\, dx_i}$$

Bernoulliova rovnice pro tekutinu

- vzniklé součiny (skaláry) na obou stranách rovnice budeme integrovat podél proudnice

$$\int v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_i = \int I_i \, dx_i - \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \, dx_i$$

- upravíme integrand na levé straně

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_i = \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_i = dx_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{dx_i}{dt} = \underbrace{v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial (v_i v_i)}{\partial x_j}} dx_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v^2}{2}\right) dx_j = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

- pole objemových sil předpokládáme konzervativní ⇒ $\vec{I} = -\operatorname{grad} \varphi$
- vyjádříme složky gradientu potenciálu φ $\quad I_i = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$
- z rovnosti integrálů podél proudnice

$$\int d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\int \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i}_{d\varphi} - \int \frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i}_{dp}$$

- získáme Bernoulliovu rovnici pro tekutinu (stlačitelnou) $\quad \dfrac{v^2}{2} + \varphi + \displaystyle\int \frac{dp}{\rho} = \text{konst.}$

Bernoulliova rovnice pro kapalinu

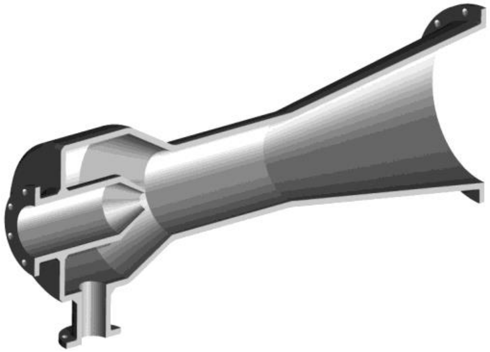
- Daniel Bernoulli (Švýcar, 1700-1782) - fyzik a matematik
- BR pro kapalinu ($\rho = \text{konst.}$) $\quad \dfrac{v^2}{2} + \varphi + \dfrac{p}{\rho} = \text{konst.}$
- jiný tvar BR $\quad \dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi + p = \text{konst.}$
- součet kinetické energie elementu, jeho potenciální energie a tlaku se zachovává podél proudnice (odlišné proudnice mají obecně různé konstanty) $\rightarrow$ ZZE
- potenciál v tíhovém poli $\quad \varphi = \dfrac{E_p}{m} = gh$
- BR pro kapalinu v tíhovém poli $\quad \dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = \text{konst.}$
- v nevírovém proudění ($\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$) platí BR se společnou konstantou pro celý prostor, v němž kapalina proudí

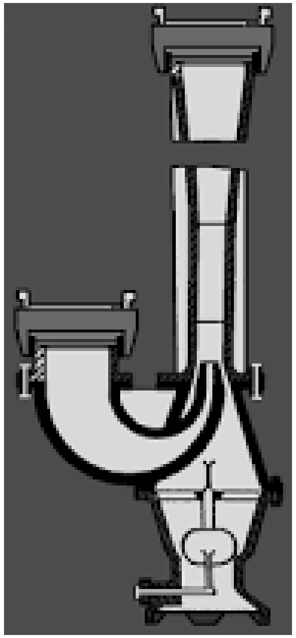
Hydrodynamické paradoxon

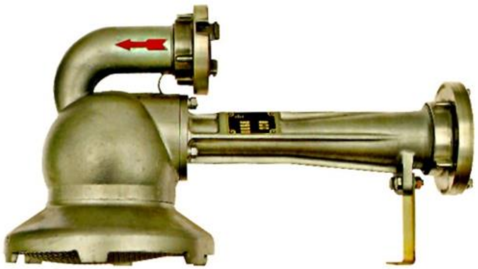
důsledky BR:

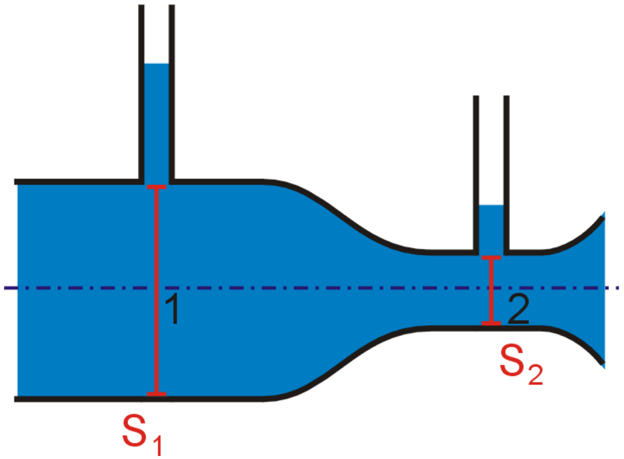
- proudění v zúžené vodorovné trubici BR + RK
- $S_1 v_1 = S_2 v_2\,,\; S_1 > S_2 \;\;\Rightarrow\;\; v_1 < v_2$
- $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \;\Rightarrow\; p_1 > p_2$
- v zúženém místě proudí kapalina pod sníženým tlakem – **hydrodynamické paradoxon (aerodynamické paradoxon)**

- aplikace: vývěvy, čerpadla, karburátory a rozprašovače

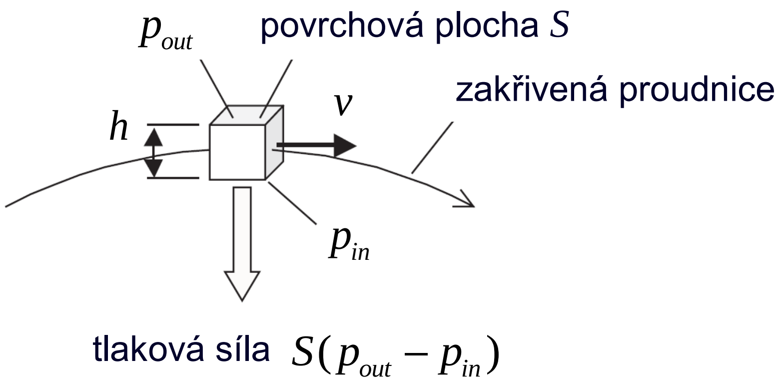


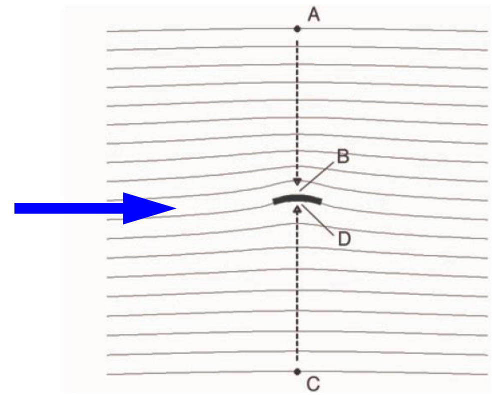


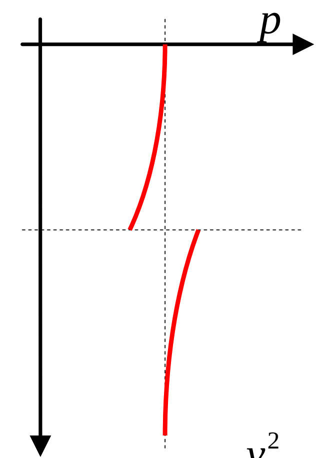




Příčina aerodynamického vztlaku







- na element tekutiny pohybující se po zakřivené trajektorii působí dostředivá síla $F = m\dfrac{v^2}{R}$
- hmotnost elementu vyjádříme pomocí rozměrů a hustoty $m = Sh\rho$
- dostředivá síla dána rozdílem tlaků působících na vnější a vnitřní plochu $F = S(p_{out} - p_{in}) = S\,dp$
- rozdíl tlaků určíme z hodnoty gradientu tlaku kolmého ke směru pohybu $dp = h \operatorname{grad} p$

  ($p_{out} > p_{in} \Leftrightarrow dp > 0 \Leftrightarrow \operatorname{grad} p > 0$)
- porovnáním obou vyjádření dostředivé síly $Sh \operatorname{grad} p = Sh\rho\dfrac{v^2}{R}$
- tlak stoupá s rostoucí vzdáleností od středu rotace $\operatorname{grad} p = \rho\dfrac{v^2}{R} > 0$

Aerodynamický vztlak při obtékání křídla

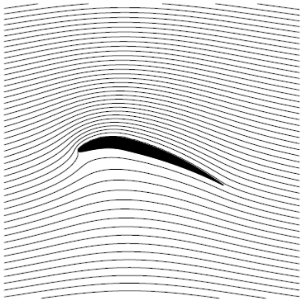
- udržení vztlaku ovlivňují také síly tření, které zabezpečí přilnutí proudnic ke křídlu
- do výpočtů nutno zahrnout co nejpřesnější popis chování tekutiny $\Rightarrow$ v praxi je nezbytné experimentální ověření

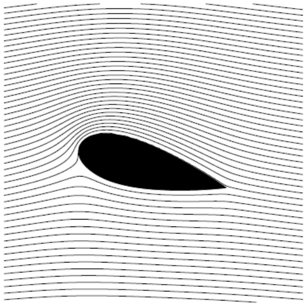
Často se vztlak zjednodušeně vysvětluje pomocí Bernoulliovy rovnice pro proudnice těsně nad a pod křídlem (horní hrana křídla je delší, a proto tam částice proudí rychleji při nižším tlaku); ukažme si některá jeho úskalí:

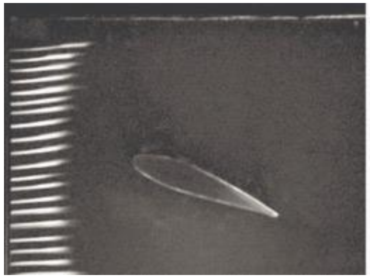
- BR představuje zákon zachování pro jednotlivou proudnici; experimenty s dýmem ukazují, že proudnice nad a pod křídlem se za křídlem nespojí, takže nelze jednoduše porovnávat odpovídající tlaky
- vysvětlení pomocí BR je založeno na tom, že proudnice pod křídlem je kratší (křídlo letadla), takže vyvolává otázku, jak vzniká vztlak na křídle s tenkým profilem (ptačí křídlo)
- silové působení vyvolává i obtékání jednoho povrchu

Přesto BR může posloužit při rozboru experimentů s dýmem:

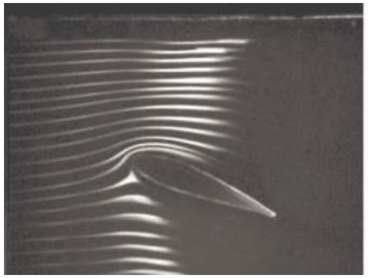
- rozumný smysl má porovnávat chování sousedních proudnic blížících se ke křídlu shora a zdola – nad křídlem pozoruji zrychlení a pod křídlem zpomalení pohybu částic, což podle BR vede na očekávané změny tlaku v okolí křídla







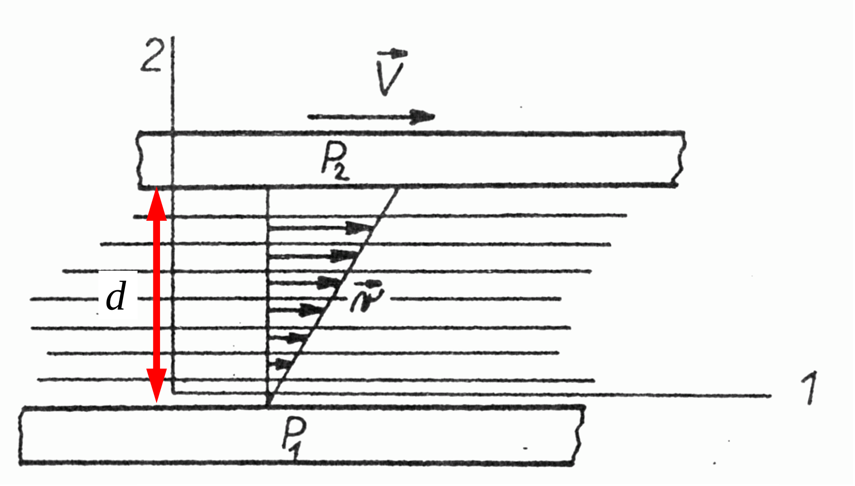
experiment s dýmem:
nad křídlem proudí vzduch rychleji než pod ním $\Rightarrow$ proudnice se za křídlem nespojí



Holger Babinsky: „How do wings work?“, 2003 *Phys. Educ.* **38** 497 (http://iopscience.iop.org/0031-9120/38/6/001/pdf/0031-9120_38_6_001.pdf)

Proudění viskózní tekutiny

- pohyb reálné kapaliny – vnitřní tření (projevuje se jen za pohybu) - viskózní tekutiny
- představa – při laminárním proudění mezi vrstvami smyková napětí
- smyková napětí nevrací částice do rovnovážných poloh, jen brzdí
- mezní vrstva přiléhající ke stěně se nehýbe (lne k povrchu)
- gradient rychlosti kolmo na směr pohybu

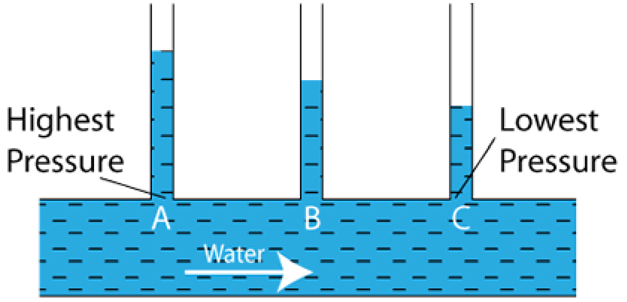


experiment:

- paralelní desky ve vzdálenosti d
- horní deska
  - rychlost $\vec{V}$
  - plocha S
  - síla F
- zákonitost $\frac{F}{S} = \eta \frac{V}{d}$
- vyhovuje (aspoň přibližně) pro většinu tekutin

zobecnění $\boxed{\sigma_{21} = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2}}$ – **newtonovská tekutina**

- konstanta úměrnosti – **dynamická viskozita** η
- (kinematická viskozita $\upsilon = \frac{\eta}{\rho}$)
- vnitřní tření způsobuje ztrátu tlaku



Tenzor napětí ve viskózní tekutině. Newtonovská kapalina

- hledá se modifikace tenzoru napětí tekutiny
- do tenzoru napětí doplněna část σ'_{ij} vyvolaná prouděním $\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p \boxed{+ \sigma'^{(i)}_{ij} + \sigma'^{(d)}_{ij}}$
- analogicky k Hookeovu zákonu předpokládáme úměrnost odpovídajícím částem tenzoru rychlosti deformace $\sigma'^{(i)}_{ij} = 2\zeta D^{(i)}_{ij} \quad \wedge \quad \sigma'^{(d)}_{ij} = \boxed{2}\eta D^{(d)}_{ij}$

aby po dosazení za tenzor rychlosti deformace byl výsledek v souladu s $\boxed{\sigma_{21} = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2}}$

Newtonovská kapalina

- 1.invariant tenzoru rychlosti deformace nulový (⇐ RK) $D_I = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \vec{v} = 0$
- proto také $D^{(i)}_{ij} = \frac{1}{3} D_I \delta_{ij} = 0$
- zároveň pak platí $D^{(d)}_{ij} = D_{ij} - \underbrace{\frac{1}{3} D_I \delta_{ij}}_{0} = D_{ij}$
- napětí v newtonovské kapalině vyjádřeno přímo pomocí tenzoru rychlosti deformace

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + 2\eta D_{ij}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Newtonovská tekutina. Druhá viskozita

- pohybová rovnice kontinua (upravena analogicky k EHR) $$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$$

$$\overbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

- dosadíme za tenzor napětí $$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{2\eta}{\rho}\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}$$

- dalšími úpravami $\rightarrow$ Navierova-Stokesova rovnice $$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

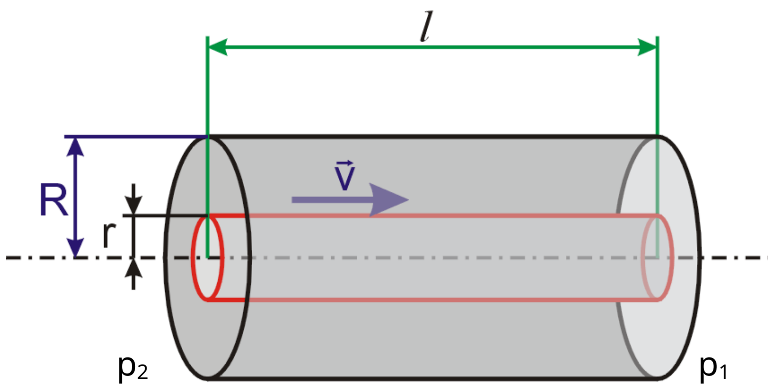
výpočet pohybu elementu nestlačitelné kapaliny

- NSR + RK - 4 rovnice pro 4 funkce v_i a p
- nelinearita rovnic $\Rightarrow$ nepatrné fluktuace mohou zcela změnit vývoj systému (efekt motýlích křídel)

Newtonovská <u>tekutina</u>

- obecně stlačitelná
- $\Rightarrow D_I \neq 0 \Rightarrow$ izotropní část tenzoru rychlosti deformace nenulová $\Rightarrow$ $$\sigma_{ij}'^{(i)} = 2\zeta D_{ij}^{(i)}$$
- konstanta úměrnosti ζ – tzv. **druhá viskozita** (odpor proti objemovým změnám)

Parabolický zákon rozdělení rychlostí



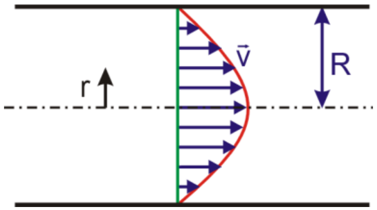
- laminární proudění viskózní newtonovské kapaliny
- válcová trubice poloměru R
- vrstvy kapaliny – souosé trubice poloměru r
- rychlost kapaliny $v = v(r)$
- smykové napětí na plochách mezi vrstvami $\tau = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right|$
- uvažujeme posouvání celého objemu válce poloměru r
- na jeho vnější stěně třecí síla proti pohybu $F_\tau = 2\pi r l \tau$
- na podstavy působí tlaky p_1 a $p_2 > p_1$, hnací rozdíl tlakových sil $F_p = (p_2 - p_1)\pi r^2$
- ustálený stav $\Rightarrow$ výsledná síla na každou proudovou trubici nulová $F_p = F_\tau$

Parabolický zákon rozdělení rychlostí

- dosazením $$(p_2 - p_1)r = 2l\eta\left|\frac{dv}{dr}\right|$$

jaké znaménko derivace rychlosti ?

- na vnitřní stěně trubice rychlost shodná s rychlostí trubice $\Rightarrow$ $v = 0$ pro $r = R$
- uvnitř trubice rychlost kladná $\Rightarrow$ $\frac{dv}{dr} < 0 \Rightarrow$ $$\frac{dv}{dr} = -\left|\frac{dv}{dr}\right|$$
- dosazením $$(p_2 - p_1)r = -2l\eta\frac{dv}{dr}$$
- separace proměnných $$dv = -\frac{(p_2 - p_1)}{2l\eta}rdr$$
- integrály v odpovídajících mezích $$\int_v^0 dv = -\frac{(p_2 - p_1)}{2l\eta}\int_r^R r'dr'$$
- integrací získáme parabolický zákon rozdělení rychlosti $$v = \frac{(p_2 - p_1)}{4l\eta}(R^2 - r^2)$$



Hagenův-Poiseuillův zákon

- Jean L. M. Poiseuille ([pwazœj] 1797-1869; Francie)
- Gotthilf H. L. Hagen (1797 – 1884; Německo)

- objem kapaliny Q, který proteče trubicí za jednotku času $$Q = \int_S v\,dS$$
- převedeme na integraci v polárních souřadnicích $$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^R v\,r\,dr\,d\varphi$$
- integrací přes úhlovou souřadnici (na úhlu φ nic nezávisí) $$Q = 2\pi\int_0^R v\,r\,dr$$
- dosazením za rychlost $$Q = 2\pi\frac{(p_2-p_1)}{4l\eta}\int_0^R (R^2-r^2)\,r\,dr$$
- int. přes poloměr $$Q = \pi\frac{p_2-p_1}{2l\eta}\left[R^2\int_0^R r\,dr - \int_0^R r^3\,dr\right] = \pi\frac{p_2-p_1}{2l\eta}\left[\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right] = \pi\frac{p_2-p_1}{8l\eta}R^4$$
- objem V newtonovské viskózní kapaliny o viskozitě η proteklý za čas t trubicí poloměru R a délky l, mezi jejímiž konce je rozdíl tlaku p_2-p_1 (Hagenův-Poiseuillův zákon) $$V = \pi\frac{p_2-p_1}{8l\eta}R^4 t$$

Laminární a turbulentní proudění

v reálné tekutině vznikají víry vždy

nicméně pro konkrétní tekutinu

- existuje oblast rychlosti proudění, kde
    - jednotlivé vrstvy proudící tekutiny kolmé ke směru proudění mají stálou rychlost ve směru vrstvy
    - vrstvy se nemísí
    - **laminární proudění**

- nad určitou mezní rychlostí
    - se vrstvy díky smykovým napětím začnou promíchávat
    - rychlost kolísá s časem
    - poruší se spojité rozložení vrstev
    - vznikají víry
    - **turbulentní proudění**

- mezi těmito dvěma oblastmi rychlostí
    - **přechodové proudění**

Reynoldsovo číslo

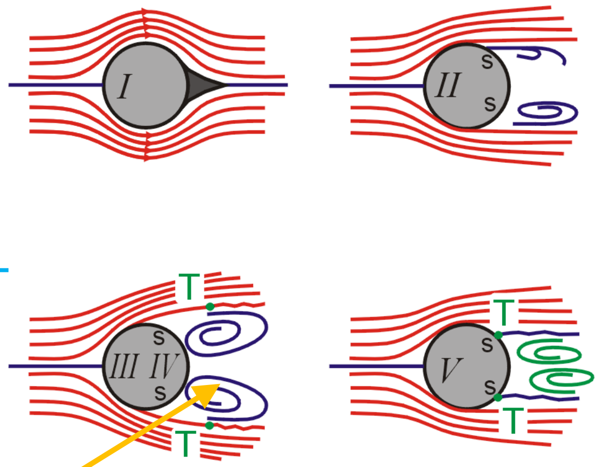
chování různých tekutin se porovnává pomocí tzv. podobnostních čísel

- charakterizující veličiny v bezrozměrném vztahu
- odráží strukturu příslušných pohybových rovnic
- je to jednoduché, většinou to funguje
- často nic lepšího nemáme
- není to přesné, široká oblast neurčitosti

Reynoldsovo číslo $Re = \dfrac{\bar{v}l}{\upsilon}$

- rozlišení laminárního ($Re < Re_K$) a turbulentního proudění ($Re > Re_K$)
- charakter se porovnává na základě
  - průměrné rychlosti proudění $\bar{v}$
  - typického rozměru l
  - kinematické viskozity $\upsilon = \dfrac{\eta}{\rho}$
- pro různá geometrická uspořádání je nutno hodnotu Re_K stanovit experimentálně

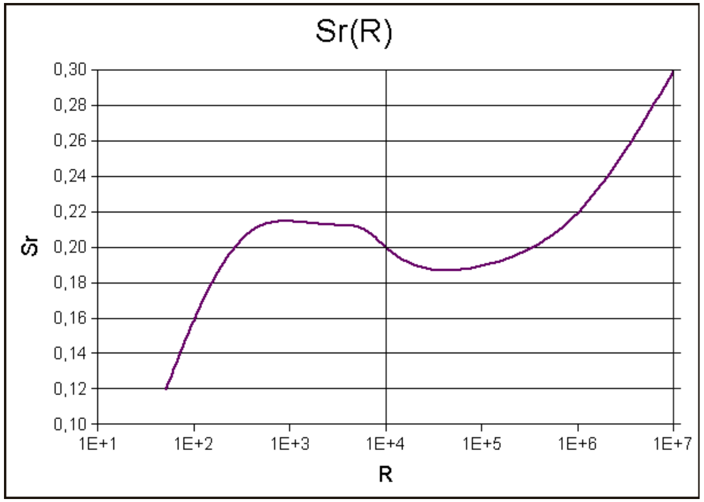
Strouhalovo číslo



Strouhalovo číslo $Sr = \frac{f\,l}{\bar{v}}$

Vincenc Strouhal (1850 – 1922) český experimentální fyzik, 1903–1904 rektor UK

- pro střední rozsah Reynoldsova čísla má přibližně konstantní hodnotu
- umožní přibližně určit frekvenci vírů v úplavu za pohybující se překážkou
- počítá se na základě
  - průměrné rychlosti proudění $\bar{v}$
  - typického rozměru l
  - frekvence vírů za překážkou f
- hodnoty pro konkrétní geometrické uspořádání se určí opět experimentálně



závislost Strouhalova čísla na Reynoldsově čísle pro válec