I. MECHANIKA

8. Pružnost

Obsah

- Křivka deformace.
- Zobecněný Hookeův zákon.
- Interpretace invariantů.
- Rozklad tenzorů na izotropní část a deviátor.
- Základní úloha teorie pružnosti.
- Elementární Hookeův zákon pro jednoosý tah.
- Youngův modul pružnosti v tahu.
- Smyk. Modul pružnosti ve smyku.
- Všestranný tlak. Objemová pružnost.
- Torze.
- Průhyb trámku.

Základní pojmy nauky o pružnosti

reologie

- stanovení souvislosti mezi napětím buzeným v kontinuu vnějšími silami a deformacemi resp. rychlostí deformace, které tato napětí vyvolají

elastické látky (napětí ~ deformace)

- lineární závislost – Hookeův (Hookův) zákon
  - izotropní – klasická teorie pružnosti
  - anizotropní
- nelineární závislost

kapaliny (napětí ~ rychlost deformace)

- lineární závislost – Newtonův viskózní zákon (newtonovské kapaliny)
- nelineární – nenewtonovské kapaliny

viskoelastické látky

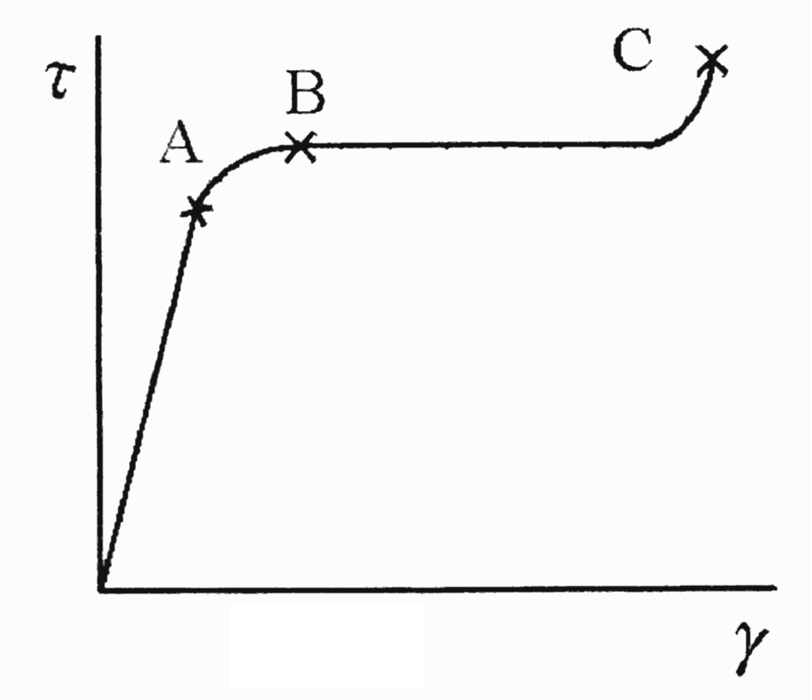
- kombinace elastické látky a viskózní kapaliny

klasická teorie pružnosti

- lineární vztahy mezi napětím a deformací izotropních elastických látek
- předpokládají se malé délkové změny (pod 1% $\rightarrow$ lze užít tenzor malých deformací)

Křivka deformace

- graf závislosti napětí na prodloužení
  - přístroj řídí deformaci a měří napětí
- A - **mez úměrnosti**
  - potud platí Hookeův zákon
- B - **mez pružnosti**
  - odtud se látka vrátí do stavu před deformací
- C – **přetržení** vzorku
- oblast B-C
  - zde materiál plasticky teče
  - závislost nejen na deformaci, ale i na rychlosti deformace
- pokud mez úměrnosti tak nízká, že nelze stanovit → nelineární chování → nehookovská látka



Zobecněný Hookeův zákon

vztah mezi napětím a deformací elastické látky

$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$ ... nejobecnější tvar Hookeova zákona

C_{ijkl} ... elastické koeficienty, v homogenní látce všude stejné

σ_{ij} a e_{kl} ... tenzory $\Rightarrow$ C_{ijkl} ... tenzor 4. řádu (81 složek)

symetrie:

σ_{ij} a e_{kl} ... symetrické tenzory - jen 6 nezávislých složek $\Rightarrow$ 9x9 $\rightarrow$ 6x6

kontrakce indexů 11$\rightarrow$1, 22$\rightarrow$2, 33$\rightarrow$3, 23$\rightarrow$4, 13$\rightarrow$5, 12$\rightarrow$6 $\Rightarrow$ matice 6x6

$\sigma_a = C_{ab} e_b$ ... energetické úvahy $\Rightarrow$ tenzor C_{ab} symetrický $C_{ab} = C_{ba}$

$\Rightarrow$ 21 složek – v případě systému s nejmenším možným počtem symetrií (trojklonná krystalografická soustava)

$\Rightarrow$ další symetrie snižují počet nezávislých koeficientů

- jednoklonná soustava – 13 koeficientů
- kubická soustava – 3 koeficienty
- izotropní látka – 2 elastické koeficienty

Zob. Hookeův zákon pro izotropní látku

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}$$

λ a μ ... Laméovy koeficienty

e_I ... 1. invariant tenzoru malých deformací

při použití kontrahovaných indexů lze zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix}$$

Význam 1. invariantu tenzoru deformací

víme, že $\dfrac{l_1 - l_{10}}{l_{10}} = e_{11} \Rightarrow l_1 = l_{10}(1+e_{11})$ a analogicky $l_2 = l_{20}(1+e_{22})$ a $l_3 = l_{30}(1+e_{33})$

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= l_{10}(1+e_{11}) \\ l_2 &= l_{20}(1+e_{22}) \\ l_3 &= l_{30}(1+e_{33}) \end{aligned}\right\} V = l_1 l_2 l_3 = \underbrace{l_{10} l_{20} l_{30}}_{V_0}(1+e_{11})(1+e_{22})(1+e_{33}) =$$

$$= V_0\left(1 + \underbrace{(e_{11}+e_{22}+e_{33})}_{e_I} + \underbrace{(e_{11}e_{22}+e_{11}e_{33}+e_{22}e_{33}) + e_{11}e_{22}e_{33}}_{\text{malé veličiny vyšších řádů zanedbáme}}\right)$$

neboli $V = V_0(1+e_I)$ takže $\dfrac{V - V_0}{V_0} = e_I$

závěr: 1. invariant tenzoru malých deformací je roven relativní změně objemu neboli tzv. objemové deformaci

Jak funguje zobecněný Hookeův zákon?

rozklad tenzoru deformace $e_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3} e_I \delta_{ij}}_{\substack{e_{ij}^{(i)} \\ \text{izotropní část}}} + \underbrace{(e_{ij} - \frac{1}{3} e_I \delta_{ij})}_{\substack{e_{ij}^{(d)} \\ \text{deviátor}}}$

konstantu volíme 1/3, aby platilo jednak

izotropní část

- jen diagonální složky $e_{11}^{(i)} = e_{22}^{(i)} = e_{33}^{(i)} = \frac{e_I}{3}$
- smykové úhly nulové
- ve všech směrech stejná deformace (izotropní deformace)
  - relativní prodloužení o $\frac{e_I}{3}$
  - relativní změna objemu o e_I
- 1. invariant izotropní části roven 1. invariantu tenzoru $e_I^{(i)} = e_I$
- popisuje <u>objemovou</u> změnu bez změny tvaru elementu kontinua

Jak funguje zobecněný Hookeův zákon?

rozklad tenzoru deformace $e_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3} e_I \delta_{ij}}_{\substack{e_{ij}^{(i)} \\ \text{izotropní část}}} + \underbrace{(e_{ij} - \frac{1}{3} e_I \delta_{ij})}_{\substack{e_{ij}^{(d)} \\ \text{deviátor}}}$

konstantu volíme 1/3, aby zároveň platilo

deviátor

- 1. invariant deviátoru $$e_I^{(i)} = \underbrace{e_{11} + e_{22} + e_{33}}_{e_I} - 3\left(\frac{1}{3} e_I\right) = 0$$
- $\Rightarrow$ relativní objemová změna nulová
- $\Rightarrow$ úhly smyku obecně nenulové – tvar elementu se deformací mění
- popisuje tvarovou deformaci odpovídající tenzoru e_{ij}

Jak funguje zobecněný Hookeův zákon?

analogicky rozložíme tenzor napětí $\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}\sigma_I \delta_{ij}}_{\substack{\sigma_{ij}^{(i)} \\ \text{izotropní část}}} + \underbrace{(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_I \delta_{ij})}_{\substack{\sigma_{ij}^{(d)} \\ \text{deviátor}}}$

izotropní část

- na plošce s normálou ν_i je vektor napětí $\overset{\nu}{T}_i = \sigma_{ij}^{(i)} \nu_j = \frac{1}{3}\sigma_I \delta_{ij} \nu_j = \frac{1}{3}\sigma_I \nu_i$
- $\Rightarrow$ vektor napětí má směr normály k plošce a velikost $\frac{1}{3}\sigma_I$
- $\Rightarrow$ napětí je čistý tlak $p = -\frac{1}{3}\sigma_I$ (pro $\sigma_I < 0$) nebo čistý izotropní tah

  $p = -\frac{1}{3}\sigma_I$ (pro $\sigma_I > 0$ má zobecněný tlak p zápornou hodnotu)

deviátor

- $\sigma_{ij}^{(d)} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_I \delta_{ij}$ představuje obecné smykové napětí
- nemusí jít o čisté smykové napětí, protože diagonální elementy nutně nemusí být nulové, jen je nulový jejich součet

Co z předchozího rozboru plyne?

- nabízí se představa, že izotropní části tenzoru napětí a tenzoru deformace by měly být úměrné $\sigma_{ij}^{(i)} = K_1 e_{ij}^{(i)}$
  - pak totiž pro všechny nenulové složky dostáváme stejnou rovnici mezi prvními invarianty obou tenzorů $\sigma_I = K_1 e_I$
  - to představuje lineární závislost relativní změny objemu elementu kontinua na čistém tlaku/izotropním tahu, která je v souladu s pozorováním na řadě látek
- v případě deviátorů se jeví také rozumným předpokládat, že mezi nimi platí úměrnost $\sigma_{ij}^{(d)} = K_2 e_{ij}^{(d)}$
  - víme, že pro čistou smykovou deformaci v rovině kolmé ke třetí souřadnicové ose s úhlem smyku α má tenzor deformace nenulovou jen složku $e_{12} = \frac{\alpha}{2}$
  - pak $e_I = 0 \Rightarrow \left. \begin{cases} e_{ij}^{(i)} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij}^{(i)} = 0 \\ e_{ij}^{(d)} = e_{ij} \Rightarrow \sigma_{ij}^{(d)} = K_2 e_{ij} \end{cases} \right\} \sigma_{12} = K_2 e_{12} = K_2 \frac{\alpha}{2}$, což opět v souladu s řadou pozorování znamená, že úhel smyku je úměrný smykovému napětí

Formulace Hookeova zákona

- izotropní lineárně elastická látka, která oběma materiálovým úměrnostem vyhovuje, se nazývá **hookovská látka** nebo **klasická elastická látka**

- po dosazení do celkového tenzoru napětí dostaneme zobecněný Hookeův zákon pro izotropní látku charakterizovaný dvěma konstantami

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(i)} + \sigma_{ij}^{(d)} = K_1 e_{ij}^{(i)} + K_2 e_{ij}^{(d)} = \frac{1}{3} K_1 e_I \delta_{ij} + K_2 \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_I \delta_{ij}\right) = \underbrace{\frac{1}{3}(K_1 - K_2)}_{\lambda} e_I \delta_{ij} + \underbrace{K_2}_{2\mu} e_{ij}$$

- jednoduchou substitucí dostaneme známější tvar $\sigma_{ij} = \lambda e_I \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$

Základní úloha teorie pružnosti

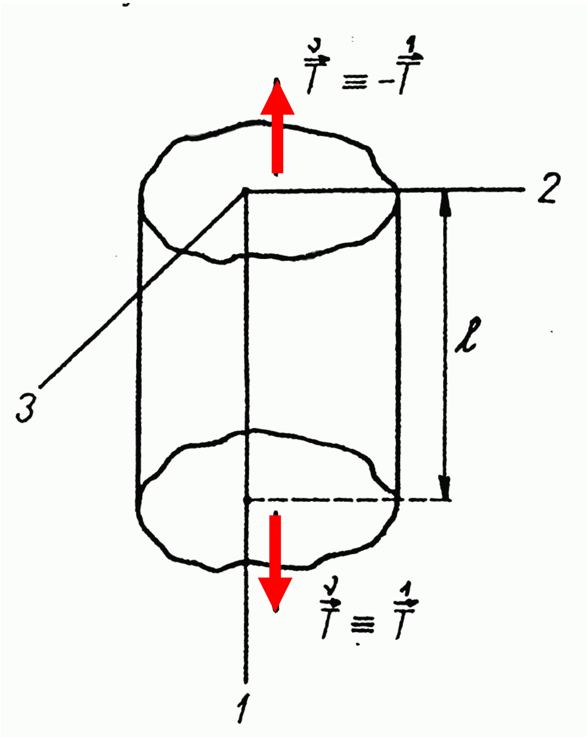
- najít napětí a deformaci v každém bodě tělesa, známe-li rozložení deformace nebo napětí na jeho povrchu
- předpokládáme, že izotropní hookeovské těleso je v rovnováze
- objemové síly (vnější) pokládáme za známé
- rovnice rovnováhy kontinua $\dfrac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0$
- Hookeův zákon $\sigma_{ij} = \lambda e_I \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$,
- kde $e_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$
- celkem 9 rovnic pro 9 neznámých funkcí $u_i(x_l)$ a $\sigma_{ij}(x_l)$
- pro jednoznačné řešení nutno zadat okrajové podmínky, tj. hodnoty funkcí na okrajích tělesa (oblast řešení)
- 2 základní úlohy
  - jsou dána posunutí $u_i(x_l)$ na povrchu tělesa
  - je známo rozložení napětí $\overset{\nu}{T}_i(x_l)$ na povrchu tělesa
- při získávání experimentálních dat je důležitý Saint-Venantův princip

Vzorek namáhaný tahem

zanedbává se vlastní tíha vzorku - objemová síla nulová

$\Rightarrow$ rovnice rovnováhy kontinua $\dfrac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$

$\Rightarrow$ $\sigma_{ij}(x_l) = \sigma_{ij}$ konstantní v celém vzorku rovnicím rovnováhy vyhovuje



normála na horní podstavě $\overset{-1}{\vec{\nu}} = (-1,0,0)$

napětí na horní podstavě $\overset{-1}{\vec{T}} = (-F/S, 0, 0)$

normála na dolní podstavě $\overset{1}{\vec{\nu}} = (1,0,0)$

napětí na dolní podstavě $\overset{1}{\vec{T}} = (F/S, 0, 0)$

okrajové podmínky $\overset{\nu}{T_i} = \sigma_{ij}\nu_j$

Vzorek namáhaný tahem

pro horní podstavu platí

$$\begin{aligned}
-F/S &= \overset{-1}{T}_1 = \sigma_{11}\overset{-1}{\nu}_1 + \sigma_{12}\overset{-1}{\nu}_2 + \sigma_{13}\overset{-1}{\nu}_3 = -\sigma_{11} \\
0 &= \overset{-1}{T}_2 = \sigma_{21}\overset{-1}{\nu}_1 + \sigma_{22}\overset{-1}{\nu}_2 + \sigma_{23}\overset{-1}{\nu}_3 = -\sigma_{21} \\
0 &= \overset{-1}{T}_3 = \sigma_{31}\overset{-1}{\nu}_1 + \sigma_{32}\overset{-1}{\nu}_2 + \sigma_{33}\overset{-1}{\nu}_3 = -\sigma_{31}
\end{aligned}$$

pro dolní podstavu platí

$$\begin{aligned}
F/S &= \overset{1}{T}_1 = \sigma_{11}\overset{1}{\nu}_1 + \sigma_{12}\overset{1}{\nu}_2 + \sigma_{13}\overset{1}{\nu}_3 = \sigma_{11} \\
0 &= \overset{1}{T}_2 = \sigma_{21}\overset{1}{\nu}_1 + \sigma_{22}\overset{1}{\nu}_2 + \sigma_{23}\overset{1}{\nu}_3 = \sigma_{21} \\
0 &= \overset{1}{T}_3 = \sigma_{31}\overset{1}{\nu}_1 + \sigma_{32}\overset{1}{\nu}_2 + \sigma_{33}\overset{1}{\nu}_3 = \sigma_{31}
\end{aligned}$$

v obou případech tedy vychází

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= F/S \\
\sigma_{21} &= 0 \\
\sigma_{31} &= 0
\end{aligned}$$

Vzorek namáhaný tahem

v libovolně vybraném bodě na válcové ploše má vektor normály $\overset{23}{\vec{\nu}}$ nulovou první složku $\overset{23}{\nu_1} = 0$, druhé dvě musí splňovat vztah $\overset{23}{\nu_2^2} + \overset{23}{\nu_3^2} = 1$ (aspoň jedna nenulová)

napětí na povrchu pláště je nulové

v každém bodě musí platit

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{23}{T_1} = \sigma_{12}\overset{23}{\nu_2} + \sigma_{13}\overset{23}{\nu_3} \\ 0 &= \overset{23}{T_2} = \sigma_{22}\overset{23}{\nu_2} + \sigma_{23}\overset{23}{\nu_3} \\ 0 &= \overset{23}{T_3} = \sigma_{32}\overset{23}{\nu_2} + \sigma_{33}\overset{23}{\nu_3} \end{aligned}$$

platí pro všechny body, pokud $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$

dosazení do Hookeova zákona

$$\begin{cases} F/S = \sigma_{11} = \lambda e_I + 2\mu e_{11} & (1) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{22} & (2) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{33} & (3) \\ 0 = 2\mu e_{12} & (4) \\ 0 = 2\mu e_{13} & (5) \\ 0 = 2\mu e_{23} & (6) \end{cases}$$

Poissonův poměr

dosazení do Hookeova zákona

$$\begin{cases} F/S = \sigma_{11} = \lambda e_I + 2\mu e_{11} & (1) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{22} & (2) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{33} & (3) \\ 0 = 2\mu e_{12} & (4) \\ 0 = 2\mu e_{13} & (5) \\ 0 = 2\mu e_{23} & (6) \end{cases}$$

řádky (4) až (6) $\Rightarrow$ $e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$

odečtením (2) a (3) $\Rightarrow$ $e_{22} = e_{33}$

dosadit za 1. invariant do (2) $\Rightarrow$ $0 = \lambda(\underbrace{e_{11} + 2e_{22}}_{e_I}) + 2\mu e_{22}$

$\Rightarrow$ vztah mezi e_{11} , e_{22} a e_{33} $\quad e_{22} = e_{33} = -\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} e_{11}$

záporná hodnota e_{22} a e_{33} znamená, že ve směrech kolmých ke směru tahu dochází k relativnímu zkrácení

Poissonův poměr $\quad \nu_P = \left|\dfrac{e_{22}}{e_{11}}\right| = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

Elementární Hookeův zákon pro tah

Poissonův poměr $\nu_P = \left|\frac{e_{22}}{e_{11}}\right| = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

pro nestlačitelný materiál $e_I = e_{11} + 2e_{22} = 0 \Rightarrow \nu_P = \left|\frac{e_{22}}{e_{11}}\right| = \frac{1}{2}$

pro stlačitelný materiál $e_I = e_{11} + 2e_{22} > 0 \Rightarrow \nu_P = \left|\frac{e_{22}}{e_{11}}\right| < \frac{1}{2}$

pro běžné materiály $\frac{1}{4} < \nu_P < \frac{1}{2}$

1. invariant pak bude $e_I = e_{11} + 2\underbrace{\frac{-\lambda}{2(\lambda+\mu)}}_{-\nu_P} e_{11} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)e_{11} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}e_{11}$

dosadit za 1. invariant do (1) $\Rightarrow$ $\frac{F}{S} = \sigma_{11} = \lambda\frac{\mu}{\lambda+\mu}e_{11} + 2\mu e_{11} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}e_{11}$

připomeňme $e_{11} \approx \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$

takže $\frac{F}{S} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\Delta l}{l_0}$

Elementární Hookeův zákon pro tah

takže

$$\frac{F}{S} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\Delta l}{l_0}$$

běžně se uvádí Hookeův zákon v elementárním tvaru pro jednoosý tah

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

kde E je **Youngův modul pružnosti**

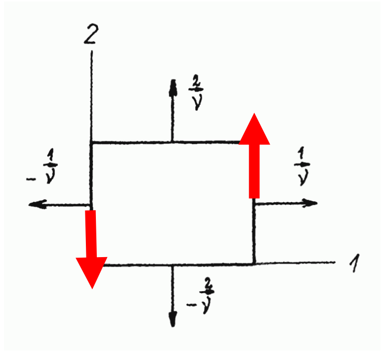
porovnáním vyjádření pomocí Laméových koeficientů

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Pozn.: Řešení základní úlohy jsme přerušili po vypočtení tenzoru malých deformací. Pro dokončení je ještě nutno vypočítat posunutí $u_i(x_l)$ pro jednotlivé body uvnitř válce. Na základě (zdlouhavé) analýzy vztahů mezi hledanými funkcemi lze dospět k jednoduchému výsledku: $u_1 = e_{11} x_1; \quad u_2 = e_{22} x_2; \quad u_3 = e_{33} x_3$

Smyk

kvádr ve smyku – tečné napětí působí na levou a pravou stěnu



normálové vektory
$$\begin{cases} \overset{1}{\vec{\nu}} = (1,0,0) \\ \overset{2}{\vec{\nu}} = (0,1,0) \\ \overset{3}{\vec{\nu}} = (0,0,1) \end{cases}$$

pro pravou stěnu

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{1}{T}_1 = \sigma_{11}\overset{1}{\nu}_1 + \sigma_{12}\overset{1}{\nu}_2 + \sigma_{13}\overset{1}{\nu}_3 = \sigma_{11} \\ F/S &= \overset{1}{T}_2 = \sigma_{21}\overset{1}{\nu}_1 + \sigma_{22}\overset{1}{\nu}_2 + \sigma_{23}\overset{1}{\nu}_3 = \sigma_{21} \\ 0 &= \overset{1}{T}_3 = \sigma_{31}\overset{1}{\nu}_1 + \sigma_{32}\overset{1}{\nu}_2 + \sigma_{33}\overset{1}{\nu}_3 = \sigma_{31} \end{aligned}$$

pro levou stěnu platí

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{-1}{T}_1 = \sigma_{11}\overset{-1}{\nu}_1 + \sigma_{12}\overset{-1}{\nu}_2 + \sigma_{13}\overset{-1}{\nu}_3 = -\sigma_{11} \\ -F/S &= \overset{-1}{T}_2 = \sigma_{21}\overset{-1}{\nu}_1 + \sigma_{22}\overset{-1}{\nu}_2 + \sigma_{23}\overset{-1}{\nu}_3 = -\sigma_{21} \\ 0 &= \overset{-1}{T}_3 = \sigma_{31}\overset{-1}{\nu}_1 + \sigma_{32}\overset{-1}{\nu}_2 + \sigma_{33}\overset{-1}{\nu}_3 = -\sigma_{31} \end{aligned}$$

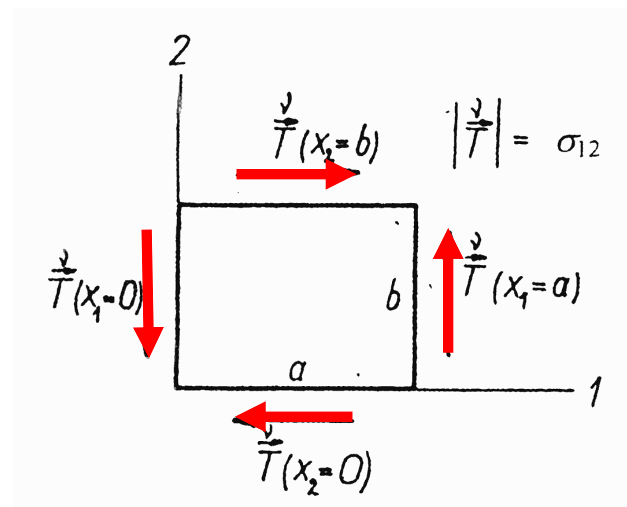
v obou případech tedy vychází

$$\sigma_{11} = 0$$
$$\sigma_{21} = F/S$$
$$\sigma_{31} = 0$$

Smyk

kvůli symetrii tenzoru napětí musí na obou podstavách také působit tečné napětí podle předpisu

$$
\begin{aligned}
F/S &= \overset{2}{T}_1 = \sigma_{11}\overset{2}{\nu}_1 + \sigma_{12}\overset{2}{\nu}_2 + \sigma_{13}\overset{2}{\nu}_3 = \boxed{\sigma_{12}} \\
0 &= \overset{2}{T}_2 = \sigma_{21}\overset{2}{\nu}_1 + \sigma_{22}\overset{2}{\nu}_2 + \sigma_{23}\overset{2}{\nu}_3 = \sigma_{22} \\
0 &= \overset{2}{T}_3 = \sigma_{31}\overset{2}{\nu}_1 + \sigma_{32}\overset{2}{\nu}_2 + \sigma_{33}\overset{2}{\nu}_3 = \sigma_{32}
\end{aligned}
$$



na plochách rovnoběžných s nákresnou musí být kvůli symetrii tečná napětí nulová a normálové se neaplikuje ⇒

$$\sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{33} = 0$$

dosazení do Hookeova zákona

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
 & 0 & = \lambda e_I + 2\mu e_{11} & (1) \\
 & 0 & = \lambda e_I + 2\mu e_{22} & (2) \\
 & 0 & = \lambda e_I + 2\mu e_{33} & (3) \\
F/S = & \sigma_{12} & = 2\mu e_{12} & (4) \\
 & 0 & = 2\mu e_{13} & (5) \\
 & 0 & = 2\mu e_{23} & (6)
\end{array}
\right.
$$

Elementární Hookeův zákon pro smyk

dosazení do Hookeova zákona

$$\begin{cases} 0 & = \lambda e_I + 2\mu e_{11} & (1) \\ 0 & = \lambda e_I + 2\mu e_{22} & (2) \\ 0 & = \lambda e_I + 2\mu e_{33} & (3) \\ F/S = \sigma_{12} & = 2\mu e_{12} & (4) \\ 0 & = 2\mu e_{13} & (5) \\ 0 & = 2\mu e_{23} & (6) \end{cases}$$

(5) a (6) $\Rightarrow$ $e_{13} = e_{23} = 0$

(1), (2) a (3) $\Rightarrow$ $e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0$

pro úhel smyku α platí $e_{12} = \dfrac{\alpha}{2}$

takže $\dfrac{F}{S} = \mu\alpha$

běžně se uvádí Hookeův zákon v elementárním tvaru pro smyk ve tvaru

$$\alpha = \frac{1}{G}\frac{F}{S}$$

kde G je **modul pružnosti ve smyku** (modul torze)
porovnáním vyjádření pomocí Laméových koeficientů $G = \mu$

(pozor na záměnu s hustotou objemové síly $\vec{G}$ nebo jejími složkami G_i)

Všestranný tlak

vzorek pod všestranným tlakem

dosazení do Hookeova zákona

$$\begin{cases} -p = \lambda e_I + 2\mu e_{11} & (1) \\ -p = \lambda e_I + 2\mu e_{22} & (2) \\ -p = \lambda e_I + 2\mu e_{33} & (3) \\ 0 = 2\mu e_{12} & (4) \\ 0 = 2\mu e_{13} & (5) \\ 0 = 2\mu e_{23} & (6) \end{cases}$$

(4) až (6) $\Rightarrow$ $\quad e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$

pomocí (1), (2) a (3) $\Rightarrow$ $\quad e_{11} = e_{22} = e_{33} = -\dfrac{p}{3\lambda + 2\mu}$

připomeňme $\quad e_I = \dfrac{V - V_0}{V_0}$

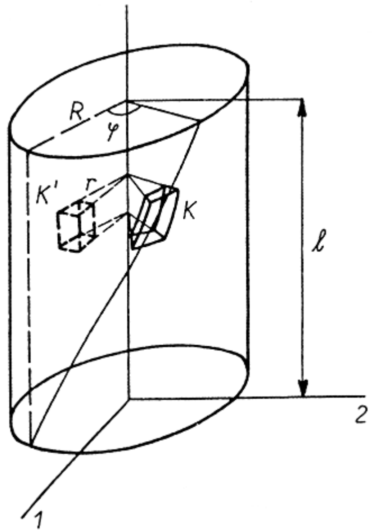
pak $\quad \dfrac{V - V_0}{V_0} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = -\dfrac{3p}{3\lambda + 2\mu}$

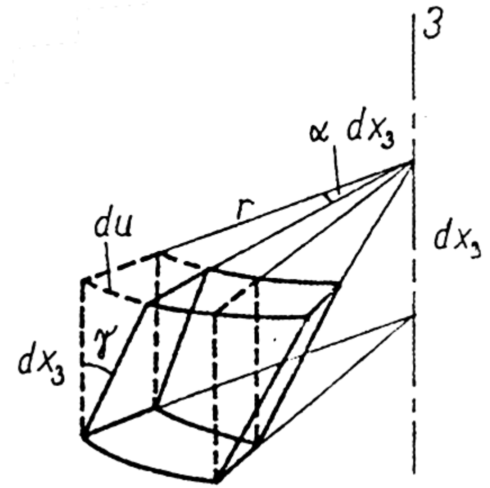
pro **objemovou pružnost** K platí $\quad \dfrac{V - V_0}{V_0} = -\dfrac{p}{K}$

porovnáním $\quad \boxed{K = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{3}}$

Torze tyče

elementy torzně namáhané tyče jsou smykově deformovány





moment síly nutný ke stočení válce o poloměru R a délce l o úhel φ

$$M = \underbrace{\frac{G\pi R^4}{2l}}_{D}\varphi$$

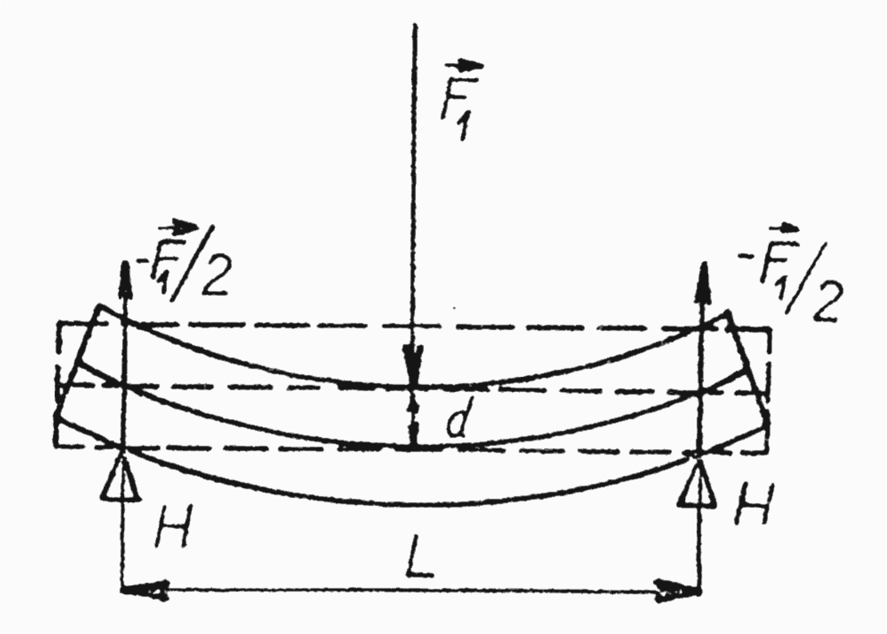
- veličina D (direkční moment) – koeficient úměrnosti mezi momentem síly a úhlem stočení (pro dlouhou tyč/vlákno nemusí jít o malé úhly)
- užití jako vratná síla při generování harmonických kmitů

$$J\frac{d^2\phi}{dt^2} = -D\phi$$

- torzní váhy

Průhyb trámku

- nosník uložený na dvou oporách



- průhyb d působením síly F_1 na nosník délky l , šíře a a výšky b

$$d = \frac{F_1 l^3}{4Eab^3}$$