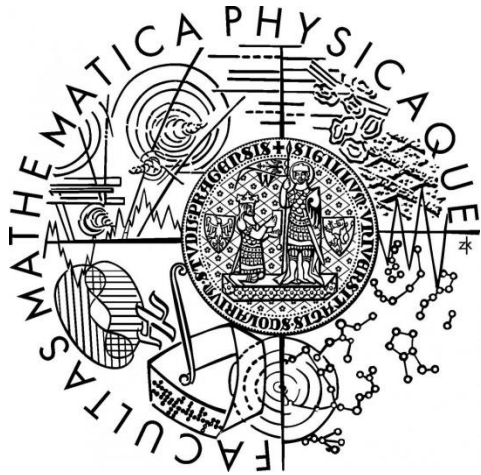


I. MECHANIKA

7. Kontinuum



Obsah

- Pojem kontinua.
- Lagrangeův a Eulerův popis kontinua.
- Trajektorie a proudnice.
- Helmholtzova věta.
- Deformace kontinua.
- Tenzor deformací.
- Význam složek tenzoru deformací.
- Tenzor rychlosti deformace. Couettovo proudění.
- Klasifikace sil v kontinuu.
- Síly objemové a plošné.
- Mechanické napětí. Skalární a vektorové napětí.
- Mechanické napětí vztažené k bodu. Tenzor napětí.
- Hlavní osy tenzoru napětí.
- Rovnice rovnováhy kontinua.
- Pohybová rovnice kontinua.

Pojem kontinua

- popis pohybu tekutin (kapaliny, plyny)
- elastické deformace (pevné látky)

- makroskopický (fenomenologický) popis
- neprojevuje se detailní struktura látek
- průměrné hodnoty veličin v okolí vyšetřovaného bodu

- popis pomocí reálných funkcí
- spojitost i na škálách, kde ve skutečnosti molekulární nebo atomová struktura
- zkoumáme elementy kontinua, nikoli indexované částice

- nezabývá se pohybem kontinua jako celku (translace, rotace)
- studuje změny vzájemných vzdáleností (elastické látky), případně rychlostí (tekutiny)

Lagrangeův a Eulerův popis kontinua

- prostor – souvislá množina M_G geometrických bodů B_G (polohové vektory \vec{r})
- těleso – souvislá množina M_M materiálových bodů (elementů kontinua) B_M (vektory \vec{R})
- axiom kontinuity \Rightarrow každému bodu B_G je v každém okamžiku přiřazen bod B_M

Lagrangeův popis

- v čase $t=0$ vybereme element kontinua B_M ležící na souřadnicích \vec{r}
- sledujeme pohyb B_M v čase – polohu \vec{R} , rychlost, zrychlení i další vlastnosti (teplotu, tlak)
- polohu v tělese \vec{R} chápeme jako funkci počáteční polohy a času $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t)$
- vhodnější pro popis elastického kontinua

Eulerův popis

- v prostoru vybereme pevný bod B_G na souřadnicích \vec{r}
- sledujeme rychlost \vec{v} elementů kontinua B_M , které se při pohybu prostorem právě nacházejí v poloze \vec{r} , jakož i jejich další vlastnosti (zrychlení, teplotu, tlak)
- výsledkem je pole rychlostí jako funkce polohy v prostoru a času $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$
- vhodnější pro popis tekutin

Trajektorie a proudnice

Lagrangeova metoda

- pohyb elementu kontinua $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t)$
- \Rightarrow trajektorie všech částic kontinua
- nekonečný počet rovnic
- často stačí konečný počet reprezentativních trajektorií (rovnic)

Eulerova metoda

- pole rychlostí částic v prostoru $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$
- pro pevný čas lze sestavit křivky, jejichž tečny mají směr vektoru rychlosti
- tyto čáry se nazývají proudnice (proudočáry)
- proudnice se nemohou křížit
- obecně se proudnice s časem mění

trajektorie a proudnice

- obecně nesplývají
- splynou v případě stacionárního (ustáleného) proudění

Helmholtzova věta

- zkoumáme, jak se mění rychlosti blízkých částic
- Eulerův popis $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \rightarrow$
- vyjádříme rychlost v okolí bodu y_j

aplikujeme sčítací pravidlo: $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy_j$

$$v_i = v_i(y_j, t)$$

$$v_i(y_j + dy_j, t) = v_i(y_j, t) + \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy_j}_{dv_i}$$

- derivaci $\frac{\partial v_i}{\partial y_j}$ (tenzor 2. řádu) rozepíšeme

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right)$$

(rozklad tenzoru na symetrickou a antisymetrickou část)

- pak

$$v_i(y_j + dy_j, t) = \underbrace{v_i(y_j, t)}_{\text{rychlost translace}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) dy_j}_{\text{rychlost rotace}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) dy_j}_{\text{rychlost deformace}}$$

rychlost translace – pohyb kontinua jako celku

rychlost rotace – pohyb kontinua jako celku (rovno nule, pokud kontinuum jen deformováno)

rychlost deformace – změny vzdáleností částic v okolí bodu y_j

první Helmholtzova věta: Pohyb kontinua v okolí určitého bodu lze rozložit na pohyb translační, rotační a na pohyb deformační.

Deformace kontinua

Lagrangeův popis

poloha elementu $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t) \rightarrow y_j = y_j(x_i, t)$

v čase $t = 0$ $y_j = y_j(x_i, 0) = x_j$


v čase $t = \Delta t$ $y_j = y_j(x_i, \Delta t)$

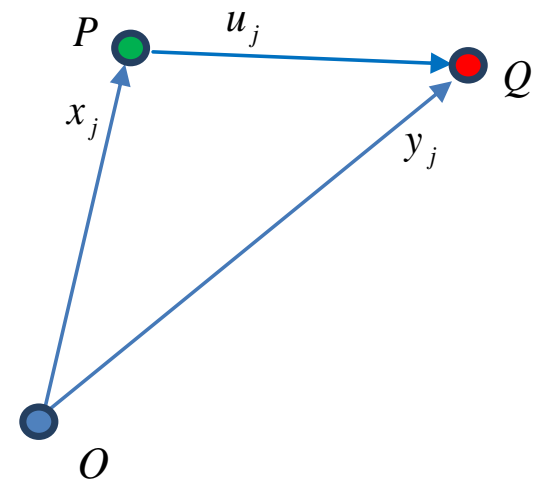
časová závislost se nezkoumá $y_j = y_j(x_i)$

vektor posunutí $u_j = y_j - x_j$

počáteční P , konečná Q poloha $y_j = y_j(x_i) = x_j + u_j(x_i)$


nedeformovaný stav


deformovaný stav



Deformace kontinua

Lagrangeův popis

poloha elementu $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t) \rightarrow y_j = y_j(x_i, t)$

v čase $t = 0$ $y_j = y_j(x_i, 0) = x_j$

v čase $t = \Delta t$ $y_j = y_j(x_i, \Delta t)$

časová závislost se nezkoumá $y_j = y_j(x_i)$

vektor posunutí $u_j = y_j - x_j$

počáteční P , konečná Q poloha $y_j = y_j(x_i) = x_j + u_j(x_i)$

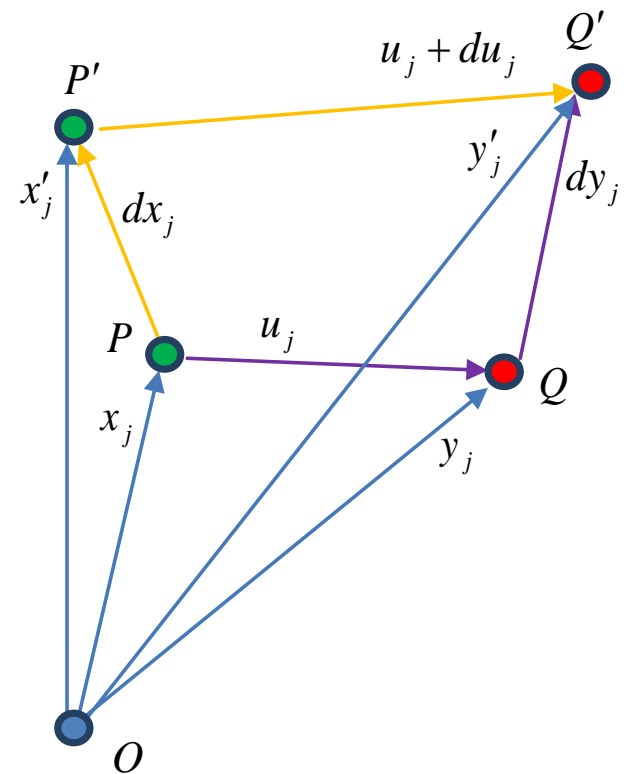
bod P' v okolí bodu P $x'_j = x_j + dx_j$

P' se přesune do Q' posunutím $u_j + du_j$

podle obrázku platí $u_j + dy_j = dx_j + u_j + du_j$

nedeformovaný stav

deformovaný stav



Deformace kontinua

Lagrangeův popis

poloha elementu $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t) \rightarrow y_j = y_j(x_i, t)$

v čase $t = 0$ $y_j = y_j(x_i, 0) = x_j$

v čase $t = \Delta t$ $y_j = y_j(x_i, \Delta t)$

časová závislost se nezkoumá $y_j = y_j(x_i)$

vektor posunutí $u_j = y_j - x_j$

počáteční P , konečná Q poloha $y_j = y_j(x_i) = x_j + u_j(x_i)$

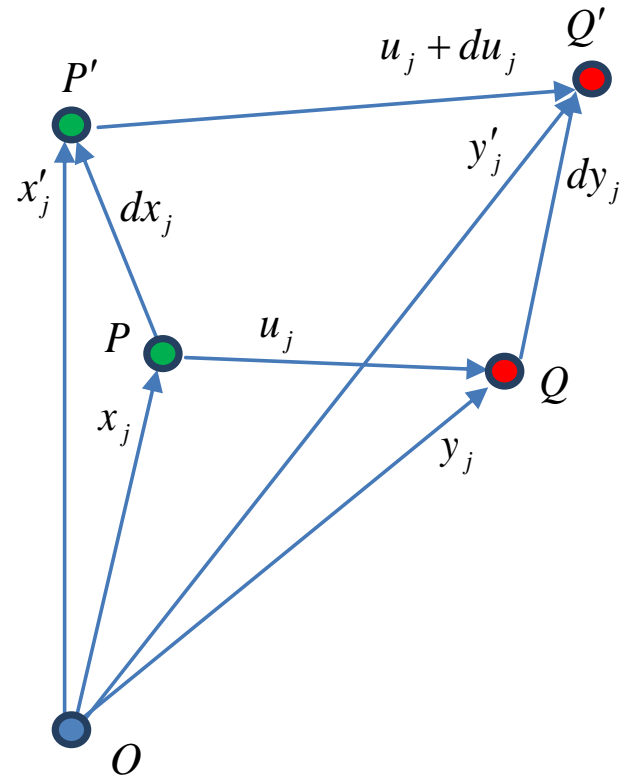
bod P' v okolí bodu P $x'_j = x_j + dx_j$

P' se přesune do Q' posunutím $u_j + du_j$

podle obrázku platí ~~$u_j + dy_j = dx_j + u_j + du_j$~~

tedy $dy_j = dx_j + du_j$

společná část vektoru posunutí z rovnice vypadne a zůstane jen ta jeho část, která se bod od bodu liší, tj. du_j



infinitesimální vektor du_j (pro pevně umístěný bod P) chápeme jako funkci infinitesimálního vektoru dx_i ;

jeho složky vyjádřené jako diferenciály funkcí $u_j = u_j(x_i)$ zapíšeme pomocí sčítací konvence $du_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$

Deformace kontinua

Lagrangeův popis

poloha elementu $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t) \rightarrow y_j = y_j(x_i, t)$

v čase $t = 0$

$$y_j = y_j(x_i, 0) = x_j$$

v čase $t = \Delta t$

$$y_j = y_j(x_i, \Delta t)$$

časová závislost se nezkoumá

$$y_j = y_j(x_i)$$

vektor posunutí

$$u_j = y_j - x_j$$

počáteční P , konečná Q poloha

$$y_j = y_j(x_i) = x_j + u_j(x_i)$$

bod P' v okolí bodu P

$$x'_j = x_j + dx_j$$

P' se přesune do Q' posunutím

$$u_j + du_j$$

podle obrázku platí

$$u_j + dy_j = dx_j + u_j + du_j$$

tedy

$$dy_j = dx_j + du_j$$

posunutí pomocí diferenciálů

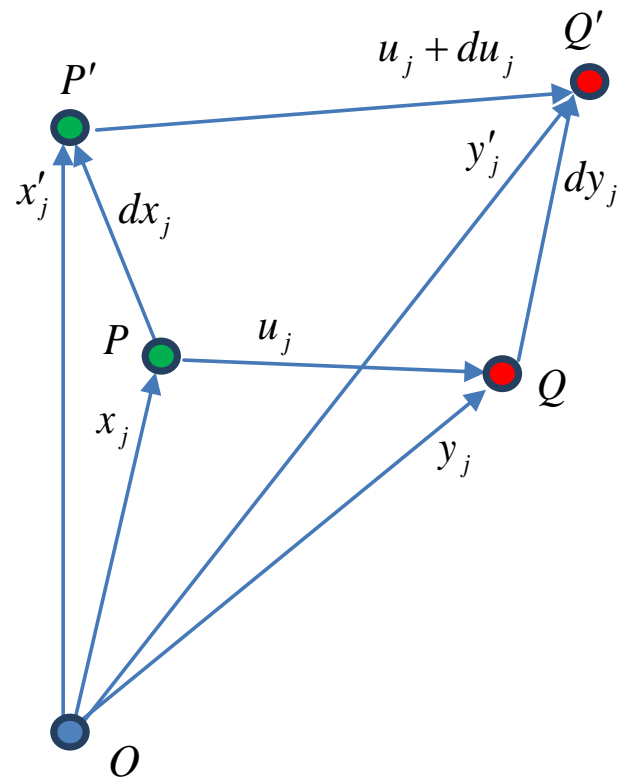
$$dy_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$$

vzdálenost bodů P a P'

$$ds_0 = \sqrt{dx_j dx_j}$$

vzdálenost bodů Q a Q'

$$ds = \sqrt{dy_j dy_j}$$



Čtverec vzdálenosti testovacích bodů

určíme rozdíl čtverců vzdáleností blízkých bodů (P a P') před a po deformaci (Q a Q')

$$ds^2 - ds_0^2 = dy_j dy_j - dx_j dx_j$$

nejprve vypočteme čtverec

$$ds^2 = dy_j dy_j = (dx_j + du_j)(dx_j + du_j)$$

dosadíme za diferenciál du_j

$$ds^2 = \left(dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l \right) \left(dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_k \right)$$

zjednodušení pomocí Kroneckerova symbolu

$$dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l = \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) dx_l$$

po dosazení lze přeskupit

$$ds^2 = \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) dx_l \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_k = \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_l dx_k$$

roznásobit

$$ds^2 = \left(\delta_{jl} \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \delta_{jk} + \delta_{jl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_l dx_k$$

využít vlastností δ_{ij}

$$ds^2 = \underbrace{\delta_{jl} \delta_{jk} dx_l dx_k}_{dx_j dx_j} + \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \delta_{jk} dx_l dx_k}_{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}} + \underbrace{\delta_{jl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_l dx_k}_{\frac{\partial u_l}{\partial x_k}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_l dx_k$$

Tenzor velkých deformací

využitím vlastností δ_{ij}

$$ds^2 = \underbrace{\delta_{jl}\delta_{jk}dx_l dx_k}_{dx_j dx_j} + \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \delta_{jk} dx_l dx_k}_{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}} + \underbrace{\delta_{jl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_l dx_k}_{\frac{\partial u_l}{\partial x_k}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_l dx_k$$

čtverec vzdálenosti bodů P a P'

$$ds^2 = \underbrace{dx_j dx_j}_{ds_0^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)}_{2\varepsilon_{lk}} dx_l dx_k$$

rozdíl čtverců vzdáleností před a po deformaci

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{lk} dx_l dx_k$$

definovali jsme novou veličinu

$$\varepsilon_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$$

- obsahuje derivace složek vektoru posunutí podle souřadnic (tenzor 2. řádu)
- z definice plyne, že $\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{kl} \Rightarrow$ symetrický tenzor
- nazývá se **tenzor velkých deformací**
- obecně funkcí souřadnic $\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{lk}(x_i)$
- přiřazením této veličiny každému bodu kontinua zadáno **tenzorové pole**

Tenzor deformace

dále předpokládáme, že deformace malé

- prodloužení/zkrácení nejvýše 1%
- → lze zanedbat malé veličiny druhého řádu

definujeme **tenzor malých deformací** (často jen **tenzor deformace**)

- opět symetrický tenzor

- $$e_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

- pro malé deformace s dobrým přiblížením platí $ds^2 - ds_0^2 = 2e_{lk} dx_l dx_k$

Poznámka: lze také vycházet z koncového (deformovaného) stavu

- v analogických výpočtech se vyjde od $x_i = y_i - u_i$, derivuje se podle souřadnic ypsilon, změní se některá znaménka a tenzor velkých deformací bude odlišný

- pro tenzor $\bar{e}_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l}{\partial y_k} \right)$ nicméně platí shodný vztah $ds^2 - ds_0^2 = 2\bar{e}_{lk} dy_l dy_k$

Význam diag. složek tenzoru deformace

deformace elementu rovnoběžného s osou x_1

$$(dx_1, 0, 0)$$

výchozí délku elementu označíme l_0

$$l_0^2 = dx_1 dx_1$$

délku v deformovaném stavu označíme l

$$l^2 = dy_i dy_i$$

změna čtverce délky (napravo zůstal ze součtu jediný člen) $dy_i dy_i - dx_1 dx_1 = 2e_{11} dx_1 dx_1$

lze vyjádřit pomocí délek elementu

$$l^2 - l_0^2 = 2e_{11} l_0^2$$

protože $|l - l_0| \ll l_0 \approx l$, můžeme psát

$$2e_{11} = \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{(l - l_0)(l + l_0)}{l_0^2} \approx \frac{(l - l_0)2l_0}{l_0^2} = \frac{(l - l_0)2}{l_0}$$

závěr:

$$e_{11} \approx \frac{l - l_0}{l_0}$$

diagonální složka tenzoru malých deformací značí relativní změnu délky elementu, který byl původně rovnoběžný s příslušnou osou kartézské souřadnicové soustavy

Význam nediag. složek tenzoru deformace

pro jednoduchost uvažujme rovinnou deformaci (jen dvě osy, tenzor 4 složky)
předpokládejme, že

$$e_{11} = e_{22} = 0 \text{ a } e_{12} = e_{21} \neq 0$$

protože $e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$, musí být splněno

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \text{ a } \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \neq 0$$

uvažme element kontinua rovnoběžný s osou x_1

$$(dx_1, 0)$$

po deformaci bude mít složky

$$dy_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$$

rozepíšeme a dosadíme

$$\left\{ \begin{array}{l} dy_1 = dx_1 + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}_0 dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \underbrace{dx_2}_0 = dx_1 \\ dy_2 = \underbrace{dx_2}_0 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \underbrace{dx_2}_0 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \end{array} \right.$$

element má po deformaci složky

$$\left(dx_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \right)$$

Význam nediag. složek tenzoru deformace

analogicky pro element rovnoběžný s osou x_2

$$(0, dx_2)$$

po deformaci bude mít složky

$$dy_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$$

dostaneme

$$\left\{ \begin{array}{l} dy_1 = \underbrace{dx_1}_0 + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \\ dy_2 = dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \underbrace{dx_1}_0 + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2}_0 = dx_2 \end{array} \right.$$

element má po deformaci složky

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2, dx_2 \right)$$

Význam nediag. složek tenzoru deformace

element rovnoběžný s osou x_1

$$(dx_1, 0)$$

po deformaci složky

$$\left(dx_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1\right)$$

element rovnoběžný s osou x_2

$$(0, dx_2)$$

po deformaci složky

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2, dx_2\right)$$

pro úhly α_1 a α_2 platí

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

a

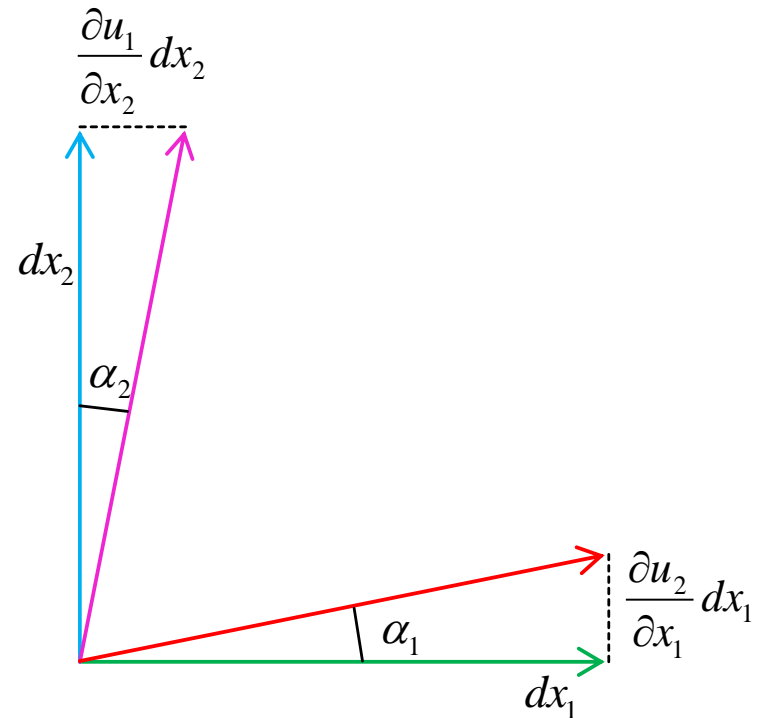
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

pro malé deformace

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha$$

pak

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2e_{12}$$



závěr: smíšená složka tenzoru deformace e_{12} je rovna polovině úhlu $\alpha_1 + \alpha_2$, o který se deformací změní pravý úhel mezi elementy původně rovnoběžnými s první a druhou osou kartézské soustavy souřadnic; úhel $\alpha_1 + \alpha_2$ se nazývá **úhel smyku**

Tenzor rychlosti deformace

vystupuje v deformační části Helmholtzovy rovnice

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right)$$

Ize ho chápat jako časovou derivaci tenzoru malých deformací $\bar{e}_{ij} (= e_{ij})$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{e}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j \partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i \partial t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) = D_{ij}$$

pár metodologických poznámek:

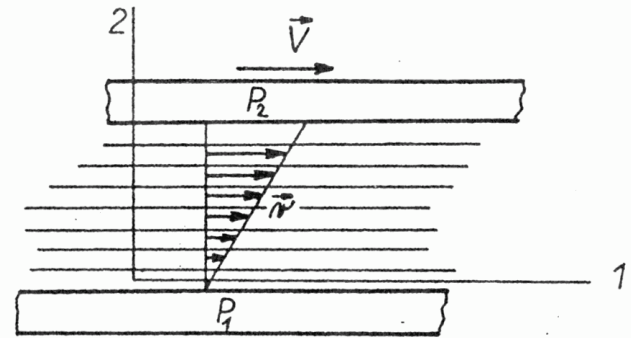
- využití zejména pro popis tekutin (proto užity proměnné spojené s kontinuem)
- v tekutinách není praktické používat tenzor deformací, protože velmi rychle se malé deformace změňí ve velké (problém neřeší ani použití t. velkých deformací)
- bylo by třeba výpočet „nulovat“ tak, aby deformace byly stále malé (problém je principiálně řešitelný, ale není to praktické)
- výpočet tenzoru rychlosti deformace se v praxi neprovádí derivováním tenzoru deformace, nýbrž se vychází přímo ze znalosti rychlostního pole

Ilustrační příklad: Couettovo proudění

mezi dvěma deskami

- P_1 ... pevná deska
- P_2 ... deska pohybující se rychlostí \vec{V}

rychlost vrstev kapaliny \vec{v} se plynule mění



nenulová složka posunutí

$$u_1 = ky_2 t$$

nenulová složka rychlosti

$$v_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} = ky_2$$

nenulová prostorová derivace

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_2} = kt$$

nenulová složka tenzoru malých deformací

$$e_{12} = \frac{1}{2} kt$$

nenulová složka tenzoru rychlosti deformace

- časovou derivací tenzoru malých deformací

$$D_{12} = \frac{\partial}{\partial t} e_{12} = \frac{1}{2} k$$

- prostorovou derivací rychlosti

$$D_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right) = \frac{1}{2} k$$

Klasifikace sil v kontinuu

vnější síly

- vnější silové působení (známe z popisu tuhého tělesa)

vnitřní síly

- v tuhém tělese se o nich neuvažovalo
- zprostředkovávají působení vnějších sil
- působí jako reakce proti tendenci vnějších sil porušit rovnováhu uvnitř kontinua a měnit jeho tvar („drží látku pohromadě“)
- určují se metodou myšleného řezu (Euler), řezem se vnitřní síla stává silou vnější a můžeme ji určit z podmínek rovnováhy oddělené části
- uvnitř kontinua neplatí všechny postupy používané v tuhých tělesech – nelze sílu posunout po přímce a změnit její působíště (změnilo by to rozložení vnitřních sil)

Objemové a plošné síly

objemové síly \vec{F}_O

- síly dlouhého dosahu (gravitační, elektrostatické,...), setrvačné síly
- působí v celém objemu (nikoli jen na povrchu)
- působí nezávisle na silách, které působí na sousední objekty

plošné (povrchové) \vec{F}_P

- síly krátkého dosahu
- působí mezi nejbližšími molekulami nebo atomy (molekulární síly/atomové vazby)
- vnější síla působí pouze na molekuly tvořící povrch tělesa (povrchové síly) – příkladem jsou tlak nebo tření
- účinek povrchových sil se přenáší dovnitř tělesa – stejné síly působí i mezi jednotlivými elementy kontinua

Kvantifikace objemových sil

- intenzita síly (na jednotkovou hmotnost)

- $\vec{I}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_o(\vec{r}, t)}{\Delta M} = \frac{d\vec{F}_o}{dm}$

- $\vec{F}_o(\vec{r}, t) = \int_{\Delta M} \vec{I} dm = \int_{\Delta V} \rho \vec{I} dV$

- hustota síly (na jednotkový objem)

- $\vec{G}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_o(\vec{r}, t)}{\Delta V} = \frac{d\vec{F}_o}{dV}$

- $\vec{F}_o(\vec{r}, t) = \int_{\Delta V} \vec{G}(\vec{r}, t) dV$

- porovnáním

- $\vec{G} = \rho \vec{I}$

Kvantifikace plošných sil

- za deformaci kontinua zodpovídají plošné síly
- zjednodušeně: při deformaci se změní polohy částic (tím se naruší dřívější rovnováha), síly mezi částicemi se snaží kontinuum navrátit do výchozího stavu
- plošná hustota povrchové síly (síla působící na jednotkovou plochu)

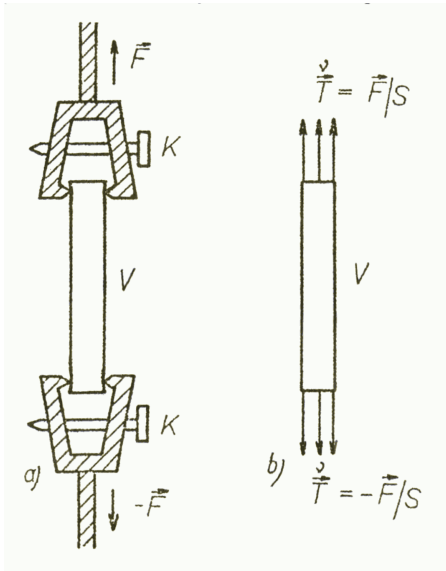
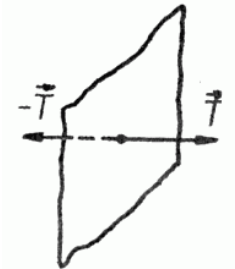
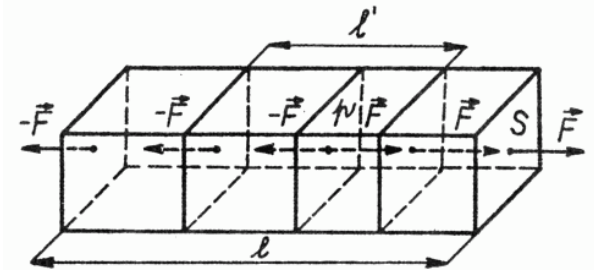
- **(mechanické) napětí** $\vec{T} = \frac{d\vec{F}_P}{dS}$ $[\vec{T}] = 1\text{N/m}^2 = \text{Pa}$

Skalární mechanické napětí

- deformované kontinuum se dostane do stavu napjatosti
- tento stav charakterizujeme napětím – plošnou silou působící mezi sousedními elementy kontinua
- v jednoduchých případech, kdy pracujeme pouze s velikostí síly, se často mechanické napětí chápe jako skalární veličina $\sigma = \frac{dF_P}{dS}$
- znaménková konvence pro skalární napětí na vnější ploše kontinua
 - napětí kladné – míří ven – tah
 - napětí záporné – míří dovnitř – tlak

Typy mechanického napětí. Čistý tah

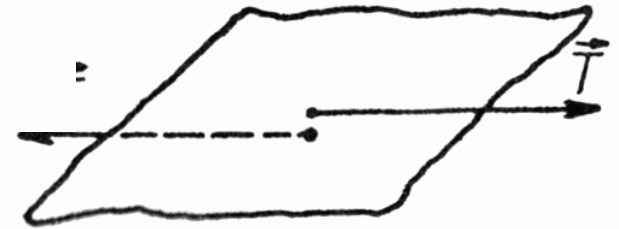
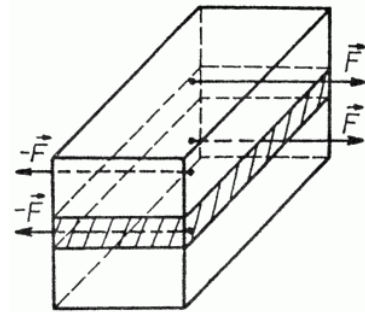
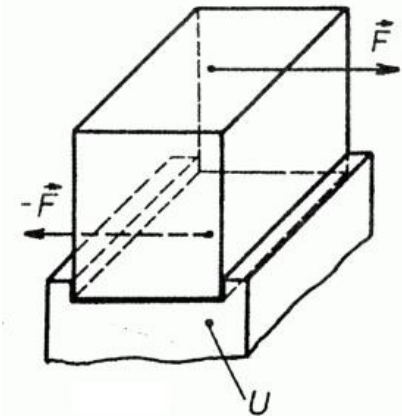
- tyč délky l a průřezu S napínána na obou koncích silami \vec{F} a $-\vec{F}$
- stejné síly působí i na libovolně krátké úseky tyče
- v limitním případě působí síly na plochu procházející libovolným bodem
- v případě síly kolmé k ploše jde o **normálové napětí (čistý tah)**



- **Saint-Venantův princip** – stav napětí a deformace v místech dostatečně vzdálených od povrchu, na kterém působí vnější síly, je téměř stejný, nahradíme-li jedno rozložení sil jiným o stejné výsledné síle a výsledném momentu sil

Typy mechanického napětí. Čistý smyk

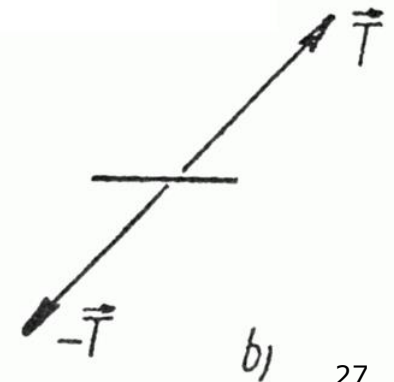
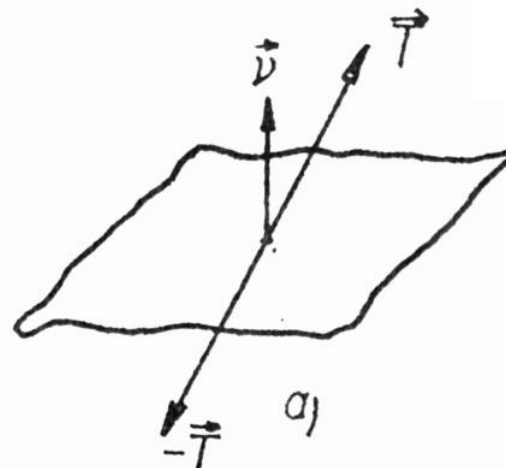
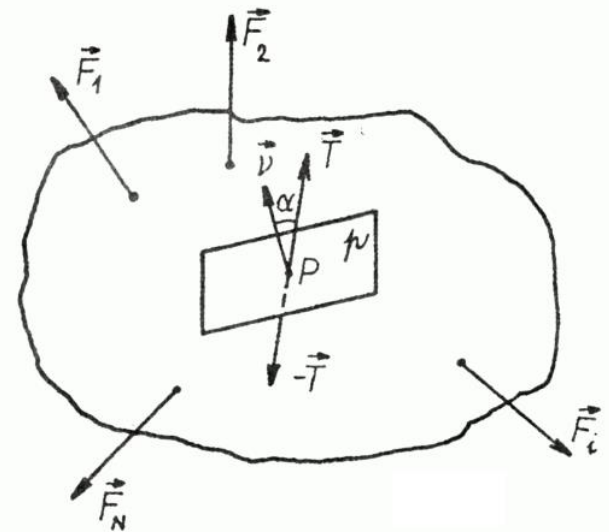
- na horní a dolní plochu ukotveného (kvůli vyrovnání momentu sil) bloku působí síly tečné k plochám (smykové síly)



- uvažujme limitní ztenčování vrstvy
- nakonec působí smyková síla na plochu
- **tečné napětí (čistý smyk)**

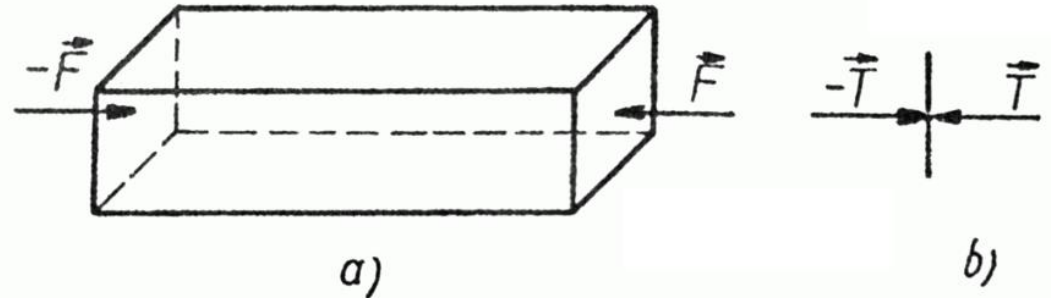
Typy mech. napětí. Obecné tahové napětí

- na kontinuum obecného tvaru působí síly $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_N$
- na plošku p proloženou bodem P působí vektor napětí \vec{T} , který svírá obecný úhel α s normálou $\vec{\nu}$ k plošce p
- **obecné tahové napětí** lze rozložit na tečnou a normálovou složku
- limitní přechod k ploše (a)
- schematické znázornění obecného tahového napětí (b)



Typy mechanického napětí. Čistý tlak

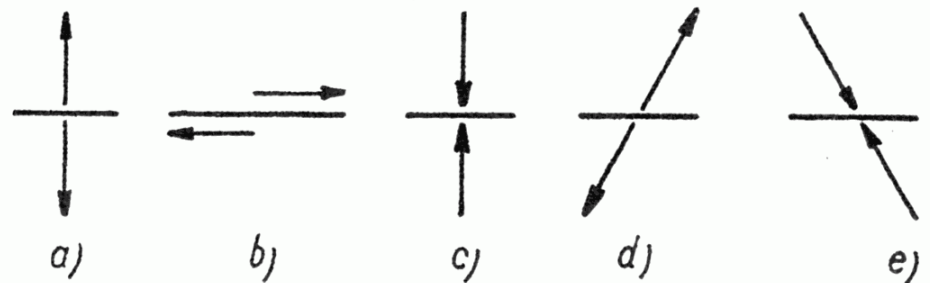
- na tyč tlačí síly kolmo k protějším stěnám



- limitní přechod k ploše
- **čistý tlak**

- schematické znázornění různých druhů napětí

- čistý tah
- čistý smyk
- čistý tlak
- obecné tahové napětí
- obecné tlakové napětí



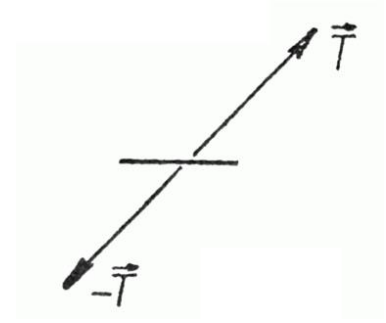
Mechanické napětí vztažené k bodu

uvažujme plošku na povrchu elementu kontinua (element může ležet jak na povrchu kontinua, tak uvnitř)

- velikost i směr plošné síly závisí na orientaci plošky
- plošná síla má vzhledem k plošce obecnou orientaci
- vektor napětí \vec{T} má směr stejný jako vektor plošné síly
- daným bodem lze vést libovolný počet různých plošek

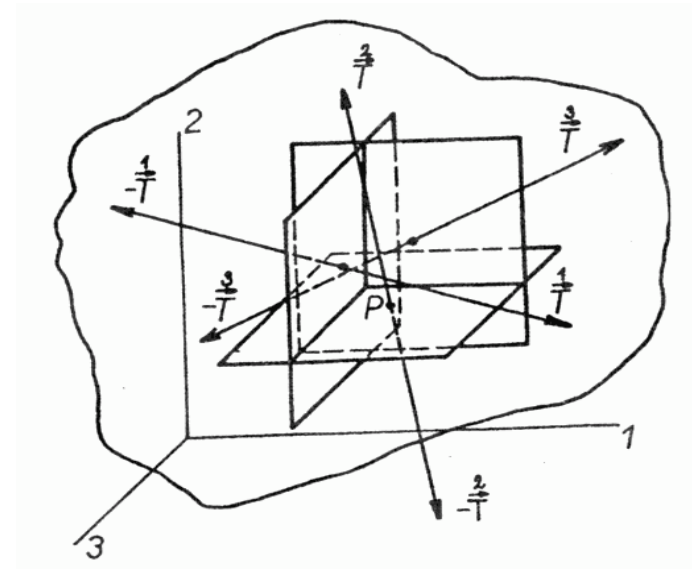
⇒ obecně tedy témuž bodu lze přiřadit mnoho různých vektorů napětí

snažíme se najít způsob, jak jednoduše v určeném bodě vypočítat vektor napětí pro zadanou orientaci plochy



Zavedení tenzoru napětí

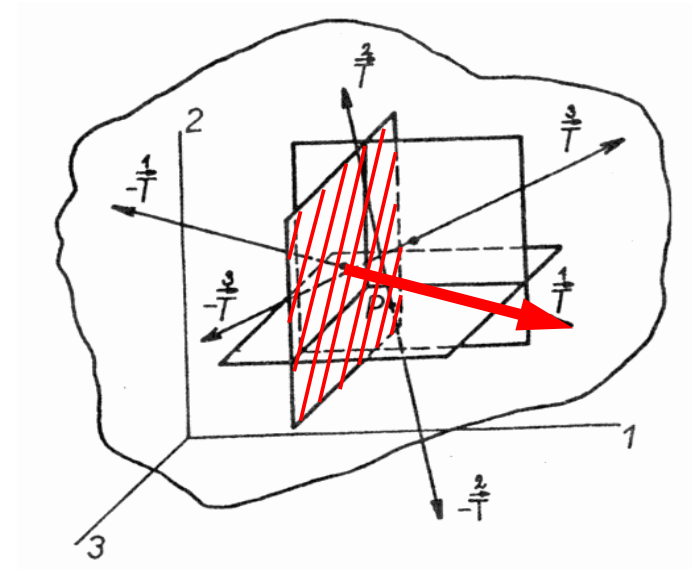
- v bodě P uvažujeme obecná tahová napětí na plochách kolmých k osám kartézské soustavy souřadnic
- napětí působící na plochu kolmou k i -té ose značíme \vec{T}^i
- kartézské složky vektoru \vec{T}^i budeme značit $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$



Zavedení tenzoru napětí

- v bodě P uvažujeme obecná tahová napětí na plochách kolmých k osám kartézské soustavy souřadnic
- napětí působící na plochu kolmou k i -té ose značíme \vec{T}^i
- kartézské složky vektoru \vec{T}^i budeme značit $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$

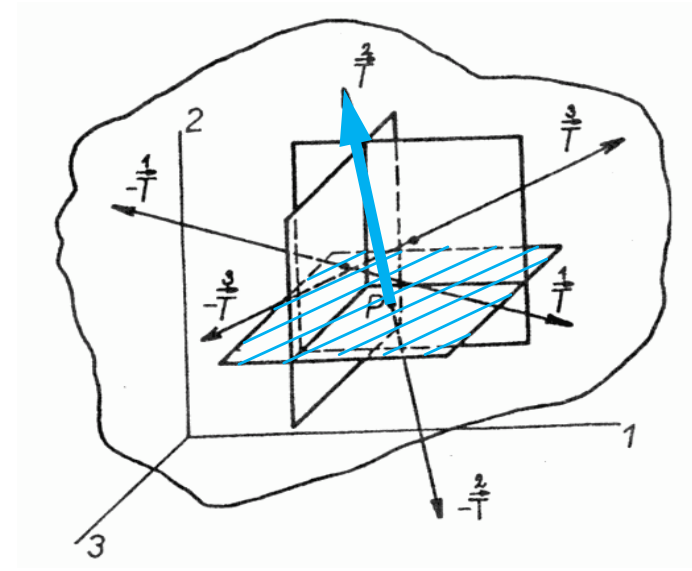
- tenzor napětí
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$



Zavedení tenzoru napětí

- v bodě P uvažujeme obecná tahová napětí na plochách kolmých k osám kartézské soustavy souřadnic
- napětí působící na plochu kolmou k i -té ose značíme \vec{T}^i
- kartézské složky vektoru \vec{T}^i budeme značit $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$

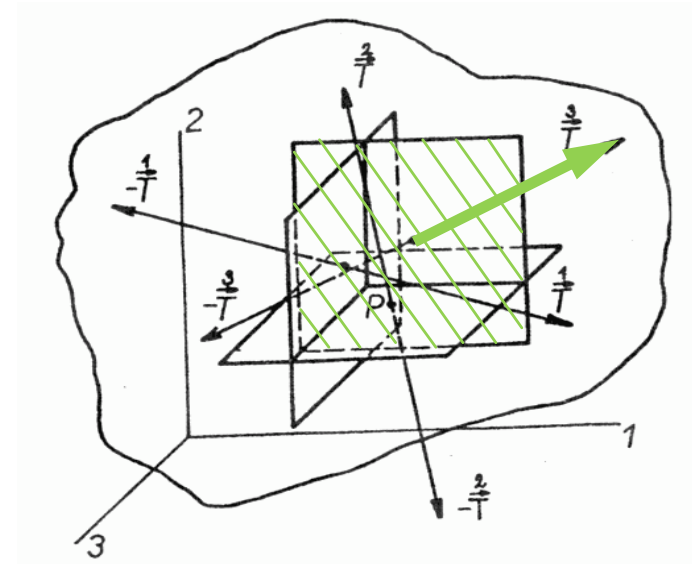
- tenzor napětí
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$



Zavedení tenzoru napětí

- v bodě P uvažujeme obecná tahová napětí na plochách kolmých k osám kartézské soustavy souřadnic
- napětí působící na plochu kolmou k i -té ose značíme \vec{T}^i
- kartézské složky vektoru \vec{T}^i budeme značit $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$

- tenzor napětí
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

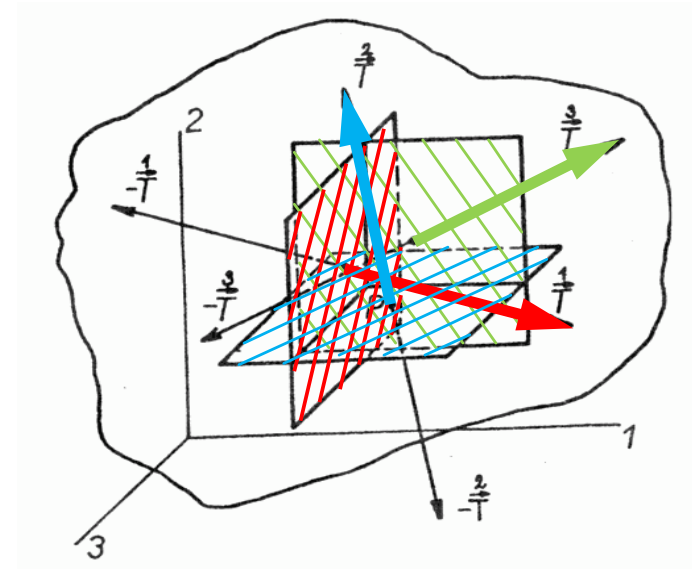


Zavedení tenzoru napětí

- v bodě P uvažujeme obecná tahová napětí na plochách kolmých k osám kartézské soustavy souřadnic
- napětí působící na plochu kolmou k i -té ose značíme \vec{T}^i
- kartézské složky vektoru \vec{T}^i budeme značit $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$

- tenzor napětí

σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}
σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}
σ_{31}	σ_{32}	σ_{33}



umíme pomocí těchto 9 veličin stanovit napětí působící v bodě P na plochu obecné orientace?

Napětí pro obecně orientovanou plochu

- v okolí bodu P uvažujeme elementární čtyřstěn
- 3 plochy kolmé k souřadnicovým osám
- 1 plocha s normálovým vektorem $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

čtyřstěn v rovnováze

$$\vec{T} S - \vec{T} S_1 - \vec{T} S_2 - \vec{T} S_3 + V\vec{G} = 0$$

- kolmé plošky lze chápat jako průměty obecné plochy

$$S_1 = S \cos \alpha_1 = S v_1$$

$$S_2 = S \cos \alpha_2 = S v_2$$

$$S_3 = S \cos \alpha_3 = S v_3$$

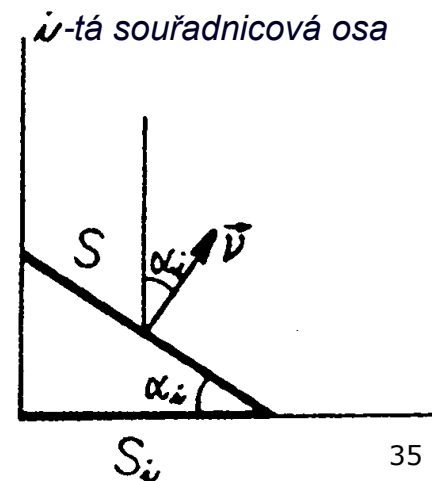
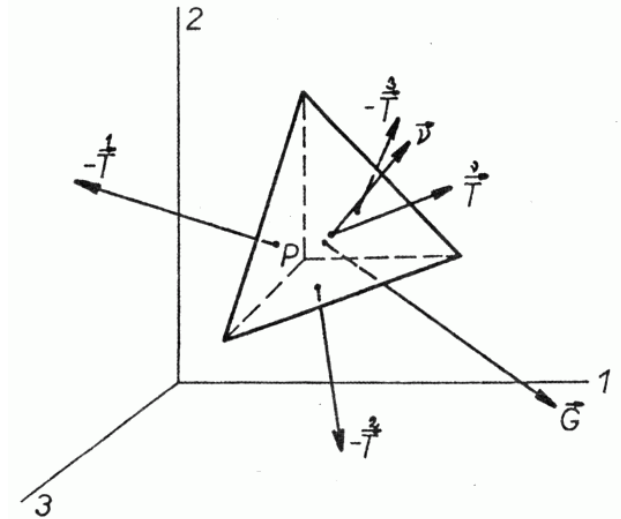
- při limitním přechodu objem čtyřstěnu konverguje k nule, tedy objemová síla vymizí

$$\vec{T} S - \vec{T} S v_1 - \vec{T} S v_2 - \vec{T} S v_3 = S \left(\vec{T} - \vec{T} v_1 - \vec{T} v_2 - \vec{T} v_3 \right) = 0$$

- hledané napětí působící na obecně orientovanou plochu

$$\vec{T} = \vec{T} v_1 + \vec{T} v_2 + \vec{T} v_3$$

- ve složkovém formalismu $T_i = \sigma_{ji} v_j$ (sloupec x řádek)



Druhá podmínka rovnováhy

- krychlový element v klidu → celkový moment sil nulový
- předpokládáme **homogenní napětí**, tj. ve všech bodech krychlového elementu působí napětí popsané stejnými koeficienty σ_{ij}
- celkový moment sil vzhledem k bodu P

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{T}^1 a^2 + \vec{r}_2 \times \vec{T}^2 a^2 + \vec{r}_3 \times \vec{T}^3 a^2 + \\ &+ (-\vec{r}_1) \times (-\vec{T}^1 a^2) + (-\vec{r}_2) \times (-\vec{T}^2 a^2) + (-\vec{r}_3) \times (-\vec{T}^3 a^2) = \\ &= 2\vec{r}_1 \times \vec{T}^1 a^2 + 2\vec{r}_2 \times \vec{T}^2 a^2 + 2\vec{r}_3 \times \vec{T}^3 a^2 \end{aligned}$$

víme, že $\begin{cases} \vec{r}_1 = (a/2, 0, 0) \\ \vec{r}_2 = (0, a/2, 0) \\ \vec{r}_3 = (0, 0, a/2) \end{cases}$ a $\begin{cases} \vec{T}^1 = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \\ \vec{T}^2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}) \\ \vec{T}^3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}) \end{cases}$

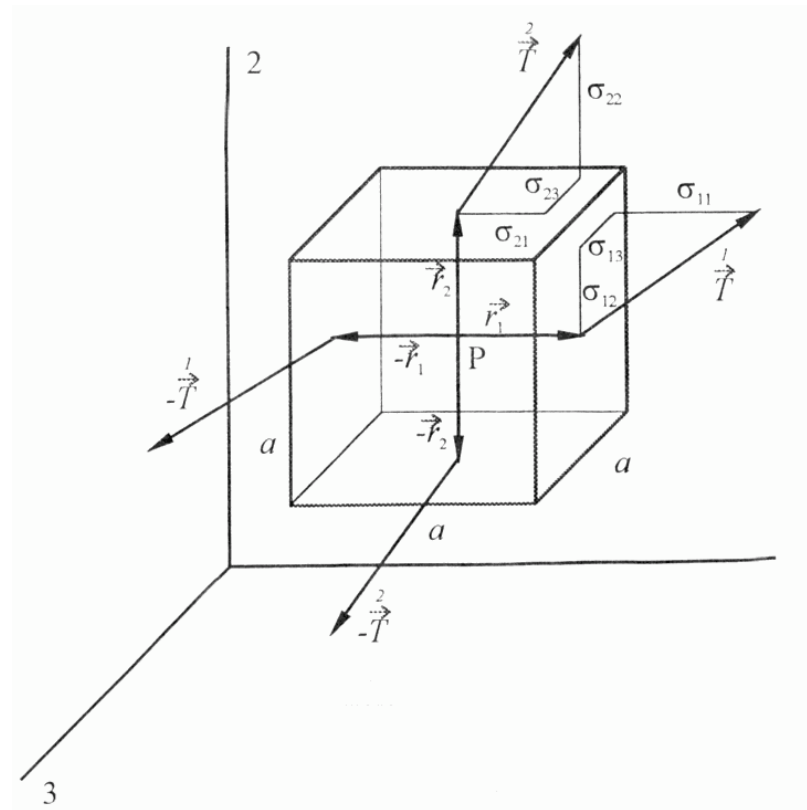
- pak složky momentu sil v rovnováze

$$M_1 = a^3 \sigma_{23} - a^3 \sigma_{32} = 0$$

$$M_2 = -a^3 \sigma_{13} + a^3 \sigma_{31} = 0$$

$$M_3 = a^3 \sigma_{12} - a^3 \sigma_{21} = 0$$

- proto musí platit $\sigma_{23} = \sigma_{32}$; $\sigma_{13} = \sigma_{31}$; $\sigma_{12} = \sigma_{21}$



Vlastnosti tenzoru napětí

- pro složky tenzoru napětí platí

$$\begin{cases} \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{cases}$$

- veličiny σ_{ij} představují symetrický tenzor 2. řádu
- tenzor popisuje stav napětí v každém bodě kontinua

- platí

$$\overset{v}{T}_i = \sigma_{ji} v_j = \sigma_{ij} v_j \quad \text{resp.}$$

$$\overset{v}{\vec{T}} = \vec{\sigma} \vec{v}$$

- síla působící na plošku

$$F_i = S \overset{v}{T}_i \quad \text{resp.}$$

$$\vec{F} = S \overset{v}{\vec{T}}$$

- při použití orientované plošky $\vec{S} = S \vec{v}$

- dostaneme pro sílu

$$F_i = \sigma_{ij} S_j \quad \text{resp.}$$

$$\vec{F} = \vec{\sigma} \vec{S}$$

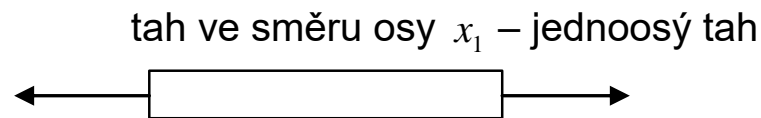
- tenzorové pole

- každému bodu kontinua přiřazeno 6 čísel (obecně se mění od bodu k bodu)
- nejde o materiálový tenzor, který odráží symetrii systému (krystalová struktura)
- tento tenzor popisuje působící síly, může být orientován libovolně vzhledem k symetriím

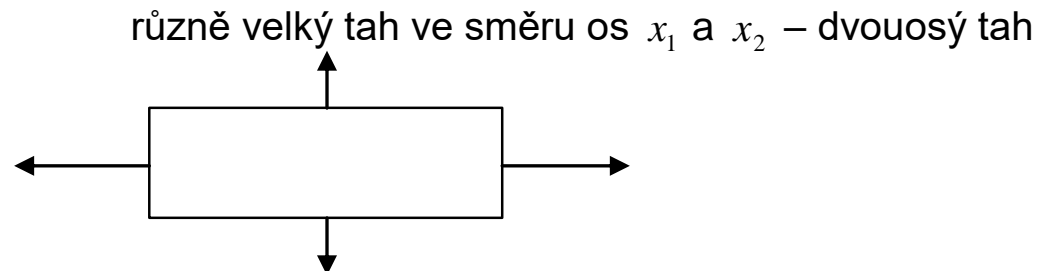
Hlavní osy tenzoru napětí – tah

- diagonalizace – nalezení hlavních směrů (řešení charakteristické rovnice)
- 3 hlavní osy – pro plochy kolmé k těmto osám je napětí čistým tahem/tlakem (jen diagonální složky tenzoru napětí – jen normálové složky k plochám)
- geometrická interpretace – elipsoid napětí

- $$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- $$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



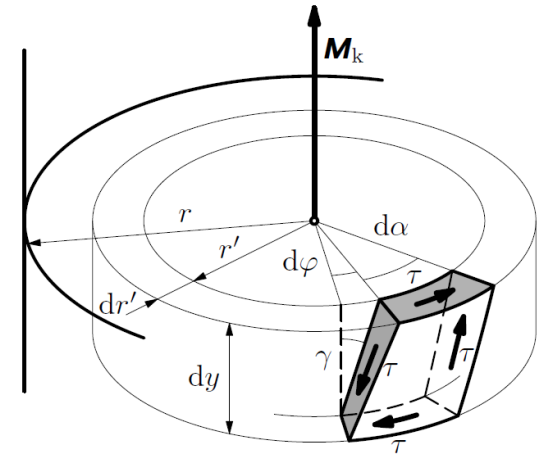
- $$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} \\ p &> 0 \end{aligned}$$

stejný tah ve třech osách – trojosý tah – hydrostatický tlak

Hlavní osy tenzoru napětí – smyk / torze

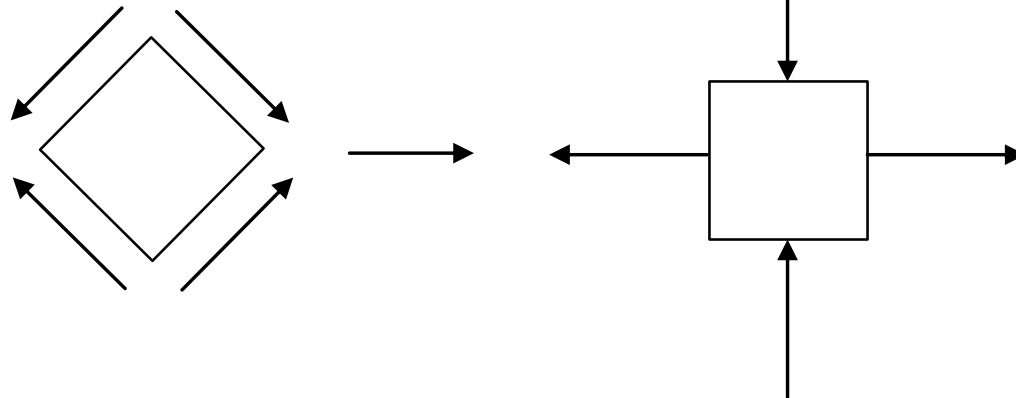
- $$\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

smyk/torze



- diagonalizací smyk přejde na dvouosý tah/tlak

- $$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Rovnice rovnováhy kontinua

- elementární kvádr v rovnováze – součet všech plošných sil pro všechny stěny a objemové síly musí být nulový
- plošné síly odhadneme pomocí hodnot ve vhodně zvolených bodech uvnitř stěn
- objemovou sílu odhadneme hodnotou ve vhodně zvoleném bodě uvnitř kvádru

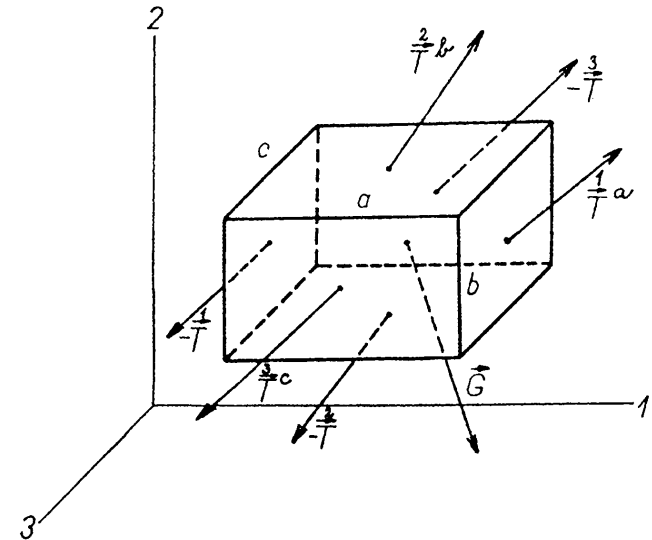
$$\left(\bar{T}^a - \bar{T}^1\right)bc + \left(\bar{T}^b - \bar{T}^2\right)ac + \left(\bar{T}^c - \bar{T}^3\right)ab + \vec{G}abc = 0$$

- po složkách

$$(\sigma_{11}^a - \sigma_{11})bc + (\sigma_{21}^b - \sigma_{21})ac + (\sigma_{31}^c - \sigma_{31})ab + G_1abc = 0$$

$$(\sigma_{12}^a - \sigma_{12})bc + (\sigma_{22}^b - \sigma_{22})ac + (\sigma_{32}^c - \sigma_{32})ab + G_2abc = 0$$

$$(\sigma_{13}^a - \sigma_{13})bc + (\sigma_{23}^b - \sigma_{23})ac + (\sigma_{33}^c - \sigma_{33})ab + G_3abc = 0$$



Rovnice rovnováhy kontinua

- užitím představy o střední hodnotě lze pro elementární kvádr vyjádřit rozdíl složek napětí na protějších stěnách ve tvaru diferenciálu $\Delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x}\Delta x$, kde derivace přísluší nějakému bodu uvnitř kvádru

$$\begin{array}{lll} \sigma_{11}^a - \sigma_{11} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} a & \sigma_{21}^b - \sigma_{21} = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} b & \sigma_{31}^c - \sigma_{31} = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} c \\ \sigma_{12}^a - \sigma_{12} = \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} a & \sigma_{22}^b - \sigma_{22} = \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} b & \sigma_{32}^c - \sigma_{32} = \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} c \\ \sigma_{13}^a - \sigma_{13} = \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} a & \sigma_{23}^b - \sigma_{23} = \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} b & \sigma_{33}^c - \sigma_{33} = \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} c \end{array}$$

- spojením dostaneme

$$\begin{array}{l} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} abc + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} bac + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} cab + G_1 abc = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} abc + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} bac + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} cab + G_2 abc = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} abc + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} bac + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} cab + G_3 abc = 0 \end{array}$$

- při limitním zmenšování kvádru lze jeho objem abc vykrátit

Rovnice rovnováhy kontinua

- všechny „vhodně zvolené“ body pro vyjádření středních hodnot přejdou při limitním zmenšování kvádrů do jediného bodu

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + G_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + G_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + G_3 = 0$$

- popsaný postup lze provést pro libovolný bod kontinua

- rovnice $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0$ představuje podmínku rovnováhy, která musí být splněna

v každém bodě kontinua

Pohybová rovnice kontinua

pokud elementární kvádr není v rovnováze

- levá strana – celková vnější síla působící na kvádr
- pravá strana – nahradit součinem zrychlení \vec{a}_s , s nímž se pohybuje hmotný střed kvádru, a celkové hmotnosti $M = \rho abc$ (ρ je hustota v některém vnitřním bodu kvádru)

- získáme rovnici
$$\left(\vec{T}^{\overset{1}{a}} - \vec{T}^{\underset{1}{a}}\right)bc + \left(\vec{T}^{\overset{2}{b}} - \vec{T}^{\underset{2}{b}}\right)ac + \left(\vec{T}^{\overset{3}{c}} - \vec{T}^{\underset{3}{c}}\right)ab + \vec{G}abc = M\vec{a}_s$$

- zrychlení hmotného středu lze zapsat jako druhou derivaci výchylky $\vec{a}_s = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$

- spojením dostaneme
$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} abc + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} bac + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} cab + G_1 abc = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \rho abc$$

...

- při limitním zmenšování kvádru lze opět jeho objem abc vykrátit
- „vhodně zvolené“ body pro vyjádření středních hodnot přejdou do jediného bodu

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + G_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

...

- popsaným postupem získáme pro libovolný bod **pohybovou rovnici kontinua**