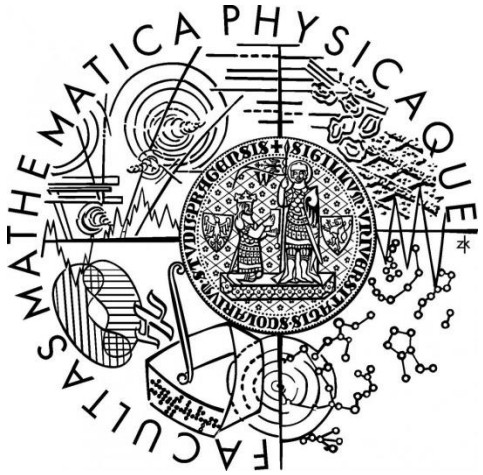
I. MECHANIKA

5. Otáčení tuhého tělesa II



Obsah

- rotace kolem pevného bodu
- pohybová rovnice pro rotaci kolem pevného bodu
- pojem tenzoru
- základní operace s tenzory
- tenzor momentu setrvačnosti
- Eulerovy rovnice
- význam deviačních momentů
- kinetická energie rotujícího tělesa
- stanovení momentu setrvačnosti vůči ose
- elipsoid setrvačnosti
- hlavní osy a hlavní momenty setrvačnosti
- setrvačníky
- volná osa rotace, stabilita

Otáčení kolem pevného bodu

- těleso rotuje kolem bodu, který se nachází na pevné pozici v i.s.s.
- snažíme se nalézt i pro tento případ pohybovou rovnici tvaru

  konstantní vlastnost objektu $\times$ charakteristika pohybu = vnější silové působení

- prvním krokem nalezení rovnice analogické k $B^{\parallel} = J\omega$
- dalším krokem hledání analogie k $\frac{d}{dt}(J\omega) = M^{E\parallel}$

Pohybová rovnice pro otáčení kolem bodu

- $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad \rightarrow$

$$v_{i1} = \omega_2 x_{i3} - \omega_3 x_{i2}$$
$$v_{i2} = \omega_3 x_{i1} - \omega_1 x_{i3}$$
$$v_{i3} = \omega_1 x_{i2} - \omega_2 x_{i1}$$

- $\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad \rightarrow$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i2} v_{i3} - x_{i3} v_{i2} \right)$$
$$B_2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i3} v_{i1} - x_{i1} v_{i3} \right)$$
$$B_3 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1} v_{i2} - x_{i2} v_{i1} \right)$$

- $\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \quad \rightarrow$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_{i2} \left(\omega_1 x_{i2} - \omega_2 x_{i1} \right) - x_{i3} \left(\omega_3 x_{i1} - \omega_1 x_{i3} \right) \right]$$
$$B_2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_{i3} \left(\omega_2 x_{i3} - \omega_3 x_{i2} \right) - x_{i1} \left(\omega_1 x_{i2} - \omega_2 x_{i1} \right) \right]$$
$$B_3 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_{i1} \left(\omega_3 x_{i1} - \omega_1 x_{i3} \right) - x_{i2} \left(\omega_2 x_{i3} - \omega_3 x_{i2} \right) \right]$$

Tenzor momentu setrvačnosti

$$B_1 = \omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i2}^2 + x_{i3}^2\right) - \omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i2} - \omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i3}$$

$$B_2 = -\omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i2} + \omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i3}^2\right) - \omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i2} x_{i3}$$

$$B_3 = -\omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i3} - \omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i x_{i2} x_{i3} + \omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i2}^2\right)$$

$$B_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3$$
$$B_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3$$
$$B_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3$$

$$I_{11} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i2}^2 + x_{i3}^2\right) \qquad I_{12} = I_{21} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i2}$$

$$I_{22} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i3}^2\right) \qquad I_{13} = I_{31} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i3}$$

$$I_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i2}^2\right) \qquad I_{23} = I_{32} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_{i2} x_{i3}$$

$$B_k = I_{kl}\omega_l \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\vec{I}}\,\vec{\omega}$$

Tenzory

přechod mezi kartézskými soustavami souřadnic $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_1', x_2', x_3'$

matice rotace $a_{ij} = \cos\alpha_{ij}$

transformace vektorů $A_i' = a_{ik} A_k \,, \quad B_j' = a_{jl} B_l$

transformace součinu složek vektorů $A_i' B_j' = a_{ik} a_{jl} A_k B_l$

označme nový objekt $T_{ij}' = A_i' B_j' \,, \quad T_{kl} = A_k B_l$

objekt se transformuje při rotaci $T_{ij}' = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$

takto se transformuje tenzor 2. řádu – obecně obsahuje 9 složek T_{ij}

vytvořený objekt $T_{kl} = A_k B_l$ je tenzor 2. řádu – má ale speciální vlastnosti, protože k jeho určení stačí pouze 6 nezávislých veličin (složky vektorů A_k a B_l)

indexy u veličin T_{ij} se vztahují k osám téže soustavy souřadnic

tenzor

indexy u veličin a_{ij} se vztahují k osám souřadnic původní a rotované soustavy

není tenzor

Tenzor *n*-tého řádu

pro veličiny $T_{i\ldots l}$, které jsou složkami tenzoru *n*-tého řádu, platí

- jsou definovány v určitém bodu trojrozměrného prostoru
- jedná se o celkem 3^n složek
- mají *n* indexů $i,\ldots,l$
- při ortogonální transformaci souřadnic platí $T'_{\underbrace{i\ldots l}_{n}} = \underbrace{a_{ir}\ldots a_{lt}}_{n} T_{\underbrace{r\ldots t}_{n}}$
- pro inverzní transformaci platí $T_{\underbrace{r\ldots t}_{n}} = \underbrace{a_{ir}\ldots a_{lt}}_{n} T'_{\underbrace{i\ldots l}_{n}}$

řád tenzorů

• nultého řádu	1 složka	skalár	A
• prvního řádu	3 složky	vektor	$\vec{A}$
• druhého řádu	9 složek	tenzor 2. řádu	$\overleftrightarrow{A}$
• třetího řádu	27 složek	tenzor 3. řádu	
• čtvrtého řádu	81 složek	tenzor 4. řádu	

tenzor symetrický v indexech *i* a *k* $T_{\ldots ikl\ldots} = T_{\ldots kil\ldots}$

tenzor antisymetrický v indexech *i* a *k* $T_{\ldots ikl\ldots} = -T_{\ldots kil\ldots}$

symetrie a antisymetrie se při transformaci zachovává

Operace tenzorového počtu

slučování $A'_{ijk} = a_{ir}a_{js}a_{kt}A_{rst}, \quad B'_{ijk} = a_{ir}a_{js}a_{kt}B_{rst}$

- $A'_{ijk} \pm B'_{ijk} = a_{ir}a_{js}a_{kt}A_{rst} \pm a_{ir}a_{js}a_{kt}B_{rst} = a_{ir}a_{js}a_{kt}(A_{rst} \pm B_{rst})$
- jen tenzory stejného řádu, vznikne opět tenzor stejného řádu
- $C_{ijk} = A_{ijk} \pm B_{ijk}$

násobení $A'_{ij} = a_{in}a_{jp}A_{np}, \quad B'_{klm} = a_{kr}a_{ls}a_{mt}B_{rst}$

- $A'_{ij}B'_{klm} = a_{in}a_{jp}a_{kr}a_{ls}a_{mt}A_{np}B_{rst}$
- vznikne tenzor, jehož řád je součtem řádů výchozích tenzorů
- $C_{ijklm} = A_{ij}B_{klm}$

úžení $T'_{ijkl} = a_{im}a_{jn}a_{kr}a_{ls}T_{mnrs}$

- položíme $k = j$ a sečteme přes index j
- $T'_{ijjl} = a_{im}\underbrace{a_{jn}a_{jr}}_{\delta_{nr}}a_{ls}T_{mnrs} = a_{im}a_{ls}T_{mnns}$
- úžením tenzoru *n*-tého řádu vznikne tenzor řádu *n*-2

Tenzor momentu setrvačnosti

2. imp. věta $\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^{E} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}}\,\vec{\omega}\right) = \vec{M}^{E} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(I_{kl}\omega_{l}\right) = M_{k}^{E}$

V případě rotace kolem bodu není vektor momentu hybnosti rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti, proto nelze najít skalární koeficient úměrnosti mezi nimi.

Narážíme na zásadní potíž:

V případě rotace kolem pevné osy byl moment setrvačnosti J vyjádřen jen pomocí vzdáleností hmotných bodů od osy rotace, které nezávisely na volbě soustavy souřadnic, zatímco v případě rotace kolem bodu jsou složky $\vec{\vec{I}}$ vyjádřeny pomocí souřadnic v inerciální s.s., vzhledem k níž se těleso otáčí a osa rotace mění, a tedy složky $\vec{\vec{I}}$ se průběžně mění také.

Závěr:

Rovnice $\frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}}\,\vec{\omega}\right) = \vec{M}^{E}$ není prakticky využitelnou analogií rovnice $\frac{d}{dt}(J\omega) = M^{E\parallel}$.

Vyjádření v soustavě rotující s tělesem

- $\vec{B} = \vec{\vec{I}}\,\vec{\omega}$ platí v libovolné vztažné soustavě **(jde stále o vektory určené vůči nehybné s.s.!)**
- provedeme transformaci do rotující soustavy spjaté s tělesem

$$\vec{B}: \quad B_k \to \beta_k$$
$$\vec{r}: \quad x_k \to \xi_k$$
$$\vec{\omega}: \quad \omega_k \to \Omega_k$$

$$\beta_1 = \Omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i2}^2 + \xi_{i3}^2\right) - \Omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i2} - \Omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i3}$$

$$\beta_2 = -\Omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i2} + \Omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i1}^2 + \xi_{i3}^2\right) - \Omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i2}\xi_{i3}$$

$$\beta_3 = -\Omega_1 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i3} - \Omega_2 \sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i2}\xi_{i3} + \Omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2\right)$$

$$J_{11} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i2}^2 + \xi_{i3}^2\right) \qquad J_{12} = J_{21} = -\sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i2}$$

$$J_{22} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i1}^2 + \xi_{i3}^2\right) \qquad J_{13} = J_{31} = -\sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i1}\xi_{i3}$$

$$J_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2\right) \qquad J_{23} = J_{32} = -\sum_{i=1}^{N} m_i \xi_{i2}\xi_{i3}$$

$$\beta_k = J_{kl}\Omega_l$$

Vyjádření v soustavě rotující s tělesem

- dostaneme analogicky k $B_k = I_{kl}\omega_l$ rovnici $\beta_k = J_{kl}\Omega_l$ platnou v soustavě spjaté s rotujícím tělesem

- protože souřadnice ξ_k jsou v této soustavě stálé, jsou i koeficienty J_{kl} stálé hodnoty

- J_{kk} představují momenty setrvačnosti v situaci, kdy těleso rotuje kolem souřadnicové osy ξ_k (**momenty setrvačnosti vůči souřadnicovým osám**)

- J_{kl} se nazývají **deviační momenty setrvačnosti**

Převedení 2. IV do rotující soustavy

- další krok – převedení časové derivace do rotující soustavy

- při odvozování Coriolisovy síly jsme nalezli vztah mezi časovou derivací vektoru v inerciální soustavě a jeho časovou derivací v rotující soustavě

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

- 2. impulsová věta v soustavě rotující s tělesem

$$\frac{d'\vec{B}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{B} = \vec{M}^{E}$$

Odvození Eulerových pohybových rovnic

- vyjádření vektorů v soustavě rotující s tělesem:

$$\vec{B}: \quad B_k \to \beta_k$$
$$\vec{\omega}: \quad \omega_k \to \Omega_k$$
$$\vec{M}^E: \quad M_k^E \to \mu_k^E$$

- dosazení do 2. impulsové věty pro rotující soustavu

$$\frac{d'\vec{B}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{B} = \vec{M}^E \quad \to \quad \begin{aligned} &\frac{d\beta_1}{dt} + \Omega_2\beta_3 - \Omega_3\beta_2 = \mu_1^E \\ &\frac{d\beta_2}{dt} + \Omega_3\beta_1 - \Omega_1\beta_3 = \mu_2^E \\ &\frac{d\beta_3}{dt} + \Omega_1\beta_2 - \Omega_2\beta_1 = \mu_3^E \end{aligned} \quad \to \quad \leftarrow \quad \beta_k = J_{kl}\Omega_l$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(J_{11}\Omega_1 + J_{12}\Omega_2 + J_{13}\Omega_3\right) + \Omega_2\left(J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + J_{33}\Omega_3\right) - \Omega_3\left(J_{21}\Omega_1 + J_{22}\Omega_2 + J_{23}\Omega_3\right) = \mu_1^E$$
$$\frac{d}{dt}\left(J_{21}\Omega_1 + J_{22}\Omega_2 + J_{23}\Omega_3\right) + \Omega_3\left(J_{11}\Omega_1 + J_{12}\Omega_2 + J_{13}\Omega_3\right) - \Omega_1\left(J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + J_{33}\Omega_3\right) = \mu_2^E$$
$$\frac{d}{dt}\left(J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + J_{33}\Omega_3\right) + \Omega_1\left(J_{21}\Omega_1 + J_{22}\Omega_2 + J_{23}\Omega_3\right) - \Omega_2\left(J_{11}\Omega_1 + J_{12}\Omega_2 + J_{13}\Omega_3\right) = \mu_3^E$$

Eulerovy pohybové rovnice

- soustava 3 diferenciálních rovnic pro 3 neznámé funkce $\Omega_k(t)$
- konstantní parametry J_{kl} tělesa je možno určit předem
- složky momentu síly μ_k^E jsou zadány

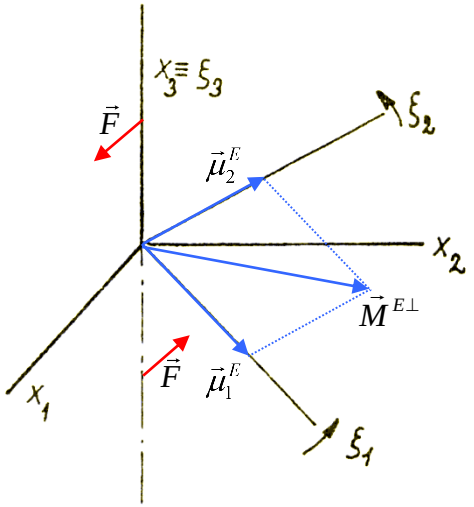
$$J_{11}\frac{d\Omega_1}{dt}+J_{12}\frac{d\Omega_2}{dt}+J_{13}\frac{d\Omega_3}{dt}+\Omega_2\left(J_{31}\Omega_1+J_{32}\Omega_2+J_{33}\Omega_3\right)-\Omega_3\left(J_{21}\Omega_1+J_{22}\Omega_2+J_{23}\Omega_3\right)=\mu_1^E$$

$$J_{21}\frac{d\Omega_1}{dt}+J_{22}\frac{d\Omega_2}{dt}+J_{23}\frac{d\Omega_3}{dt}+\Omega_3\left(J_{11}\Omega_1+J_{12}\Omega_2+J_{13}\Omega_3\right)-\Omega_1\left(J_{31}\Omega_1+J_{32}\Omega_2+J_{33}\Omega_3\right)=\mu_2^E$$

$$J_{31}\frac{d\Omega_1}{dt}+J_{32}\frac{d\Omega_2}{dt}+J_{33}\frac{d\Omega_3}{dt}+\Omega_1\left(J_{21}\Omega_1+J_{22}\Omega_2+J_{23}\Omega_3\right)-\Omega_2\left(J_{11}\Omega_1+J_{12}\Omega_2+J_{13}\Omega_3\right)=\mu_3^E$$

- toto je nejobecnější tvar Eulerových rovnic
- vhodná volba souřadnicové soustavy v tělese umožní podstatné zjednodušení

Význam deviačních momentů



předp., že těleso připevněno na pevné ose $x_3 \equiv \xi_3$, tj. doplněno takové působení sil, aby osy byly trvale ztotožněny (lze porovnat různé popisy)

moment hybnosti $\vec{B}$ rotuje spolu s tělesem (protože není rovnoběžný s osou rotace, pořád se mění a podle 2.IV trvale působí moment sil)

Eulerovy rovnice:

$$J_{33}\frac{d\Omega_3}{dt} = \mu_3^E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}B^{\parallel} = J\frac{d\omega}{dt} = M^{E\parallel}$$

$$J_{13}\frac{d\Omega_3}{dt} - J_{23}\Omega_3^2 = \mu_1^E \quad \rightarrow$$ ve směru osy ξ_1 působí složka μ_1^E vnějšího momentu

$$J_{23}\frac{d\Omega_3}{dt} + J_{13}\Omega_3^2 = \mu_2^E \quad \rightarrow$$ ve směru osy ξ_2 působí složka μ_2^E vnějšího momentu

Pozn.: různá znaménka v E. rovnicích – v levotočivé soustavě by byla obráceně

(vnější moment $\vec{M}^{E\perp}$ se složkami μ_1^E, μ_2^E, 0 brání vychýlení osy rotace)

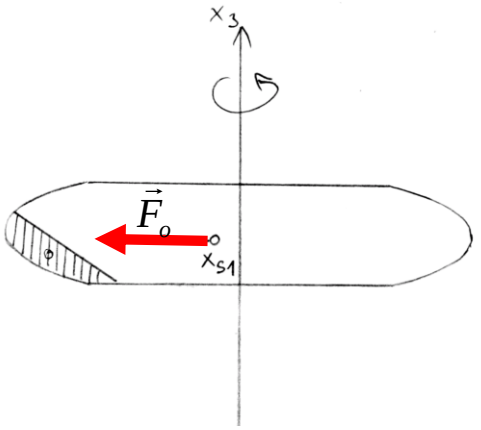
- pro $\frac{d\Omega_3}{dt} = 0$ jsou složky β_1 a β_2, jakož i μ_1^E a μ_2^E konstantní (v rotující soustavě)
- transformace do laboratorní i.s.s. $\rightarrow$ průměty vektorů $\vec{B}^{\perp}$ a $\vec{M}^{E\perp}$ rotují kolem osy rotace

Význam deviačních momentů

příklad – vyvažování pneumatiky

statická nevyváženost

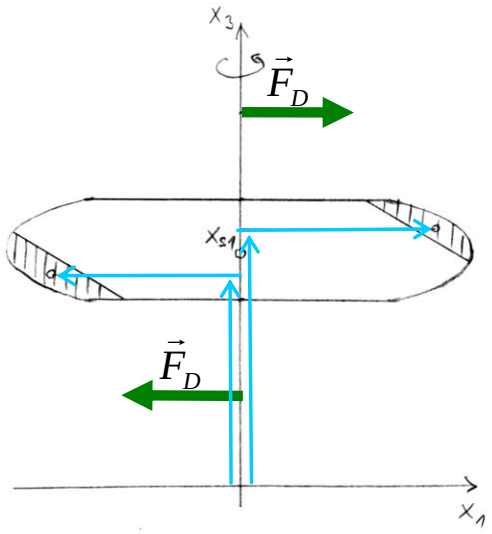
hmotný střed mimo osu otáčení $\Rightarrow$ odstředivá síla $\vec{F}_o$



dynamická nevyváženost

nenulový deviační moment

$J_{13} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_{i1} x_{i3} \neq 0 \Rightarrow$ moment sil se snaží vychýlit osu



Kinetická energie rotujícího tělesa

rotace kolem hmotného středu

- vnitřní kinetická energie rotující soustavy h.b. $E_{kI} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \vec{v}_{cn} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{cn})$
- platí (objem rovnoběžnostěnu) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$
- kinetickou energii lze vyjádřit pomocí tenzoru setrvačnosti

$$E_{kI} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{cn} \times \vec{v}_{cn}) =$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_{cn} \times m_n \vec{v}_{cn}}_{\vec{B}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{B} =$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\vec{J}} \cdot \vec{\omega}$$

- po složkách (kvadratická forma v ω_i) $E_{kI} = \frac{1}{2} \omega_i J_{ij} \omega_j$

Stanovení momentu setrvačnosti vůči ose

rotace kolem pevné osy (v libovolném směru) procházející hmotným středem

zavedeme jednotkový vektor ve směru rotace $\vec{n} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

pak lze kinetickou energii zapsat

$$E_{kI} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}|\vec{\omega}|\,\vec{n}\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{n}\,|\vec{\omega}| = \frac{1}{2}\vec{n}\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{n}\;\omega^2$$

zároveň jsme dříve odvodili $E_{kI} = \frac{1}{2} J\;\omega^2$

kde skalární veličina J představuje moment setrvačnosti tělesa vůči ose rotace

porovnáním vidíme, že

moment setrvačnosti J vůči libovolné zadané ose je možno zapsat ve tvaru

$$J = \vec{n}\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{n}$$

pomocí Steinerovy věty je pak možno vyjádřit moment setrvačnosti vůči libovolné ose posunuté mimo hmotný střed tělesa

Závěr: moment setrvačnosti tělesa vůči libovolné ose umíme stanovit na základě znalosti 6 nezávislých složek tenzoru momentu setrvačnosti

Elipsoid setrvačnosti

- složky jednotkového vektoru ve směru rotace (směrové kosiny) $n_1,\ n_2,\ n_3$
- moment setrvačnosti vůči ose rotace (s využitím symetrie tenzoru)

$$J = \vec{n} \cdot \vec{\vec{J}} \cdot \vec{n} \qquad \rightarrow \qquad J = n_1^2 J_{11} + n_2^2 J_{22} + n_3^2 J_{33} + 2n_1 n_2 J_{12} + 2n_1 n_3 J_{13} + 2n_2 n_3 J_{23}$$

- zavedeme vektor $\vec{\rho} = \dfrac{\vec{n}}{\sqrt{J}}$
- názorná představa: na paprsky ve směrech osy rotace vynášíme vzdálenosti $1/\sqrt{J} \rightarrow$ koncové body $\vec{\rho}$ vytvoří plochu, pro kterou platí

$$1 = \rho_1^2 J_{11} + \rho_2^2 J_{22} + \rho_3^2 J_{33} + 2\rho_1 \rho_2 J_{12} + 2\rho_1 \rho_3 J_{13} + 2\rho_2 \rho_3 J_{23}$$

- tato rovnice je známa jako rovnice kvadriky

- při splnění určitých podmínek na koeficienty J_{ij} (splňuje je každý symetrický tenzor 2. řádu) je řešením elipsoid - zde je to tzv. **elipsoid setrvačnosti**

Diagonalizace tenzoru setrvačnosti

Povšimněme si:

- elipsoid setrvačnosti v obecné s.s. orientován obecně
- e.s. má jisté symetrie – a to dokonce i v případě naprosto nesymetrických těles

Z teorie kvadrik plyne

- osy elipsoidu setrvačnosti určují 3 kolmé význačné směry (v případě rotační symetrie nemusí být všechny určeny jednoznačně)
- v kartézské soustavě souřadnic spojené s těmito 3 směry platí
  - deviační momenty nulové $J_{12} = J_{23} = J_{13} = 0$
  - matice má diagonální tvar: $\begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix}$
  - proto lze zavést značení $J_1 \equiv J_{11}, \; J_2 \equiv J_{22}, \; J_3 \equiv J_{33}$
  - pro osy rotace ve směru souřadnicových os platí $\vec{B} = J_i \vec{\omega}$

Hlavní osy a hlavní momenty setrvačnosti

Důsledky diagonalizace

- osy, vůči nimž deviační momenty tenzoru setrvačnosti vymizí, se nazývají **hlavní osy** tenzoru setrvačnosti; při rotaci tělesa kolem těchto os nedochází k „házení“
- momenty setrvačnosti $J_1 \equiv J_{11}$, $J_2 \equiv J_{22}$, $J_3 \equiv J_{33}$ se nazývají **hlavní momenty setrvačnosti**
- rovnice elipsoidu setrvačnosti v kanonickém tvaru $1 = \rho_1^2 J_1 + \rho_2^2 J_2 + \rho_3^2 J_3$

- stanovení momentu setrvačnosti vůči lib. ose $J = n_1^2 J_1 + n_2^2 J_2 + n_3^2 J_3$

Praktický závěr: Moment setrvačnosti tělesa vůči libovolné ose lze stanovit na základě znalosti 3 jeho hlavních momentů setrvačnosti .

Hlavní osy a hlavní momenty setrvačnosti

hlavní osy běžných homogenních těles

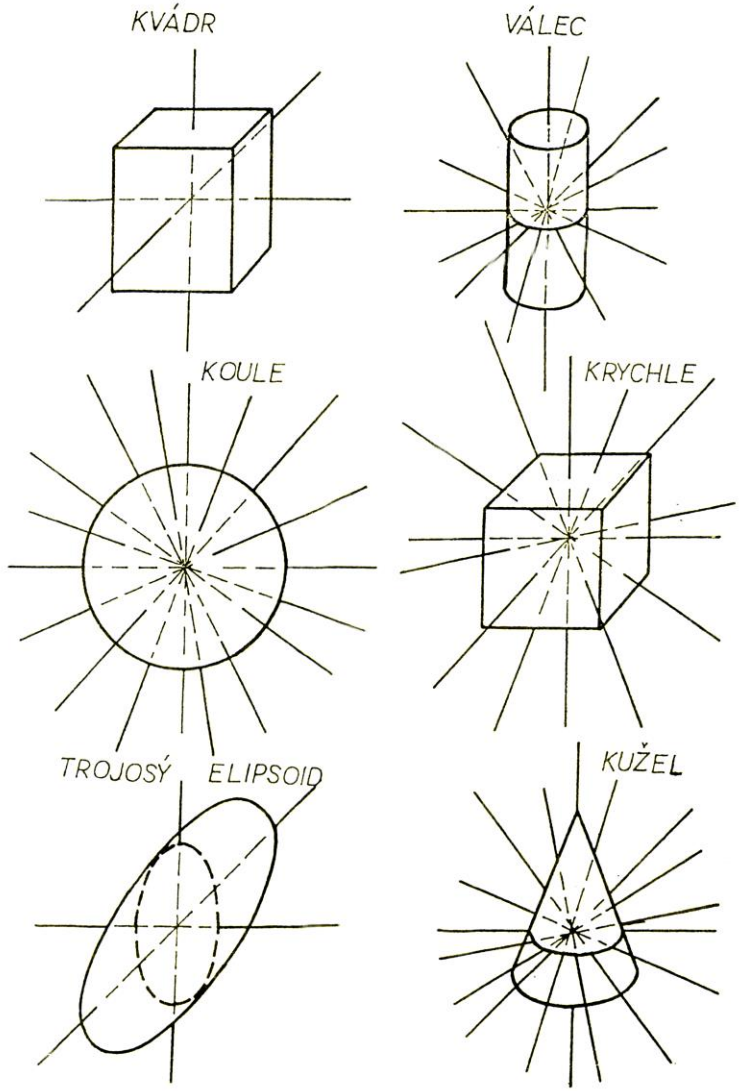
- často netřeba počítat, vyplynou ze symetrie
- rotační osa – hlavní osa
- osy kolmé k rotační ose – všechny jsou hlavní osy

- v případě vyšší symetrie (koule) – všechny osy procházející hmotným středem jsou hlavní

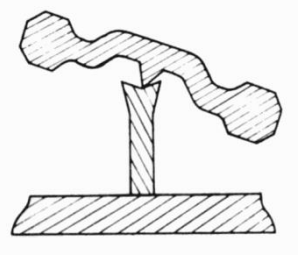
- v případě krychle platí totéž – moment setrvačnosti pro libovolný směr má stejnou hodnotu

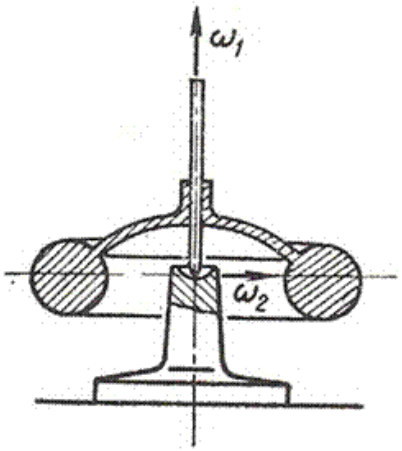
$$J = \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) J_1$$

- $\Rightarrow$ koule i krychle jsou tzv. kulové setrvačníky



Setrvačníky





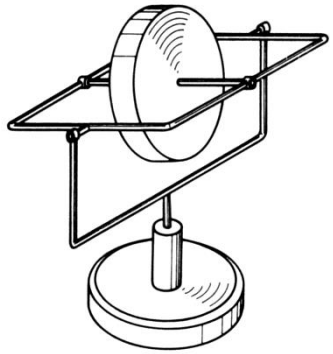
asymetrický $J_1 \neq J_2, \quad J_2 \neq J_3, \quad J_1 \neq J_3$

symetrický $J_1 = J_2 \neq J_3,$

kulový $J_1 = J_2 = J_3 = J$

setrvačník hovorově $J_1 = J_2 << J_3$

setrvačník volný (bezsilový) nulové vnější silové působení
upevnění v hmotném středu



Kardanův závěs

- upevnění se 3 stupni volnosti
- osy musí být navzájem aspoň přibližně kolmé
- animace ukazuje i situace se sníženým počtem stupňů volnosti (všechny obruče v rovině → rotace vnější obruče v této rovině se přenáší až na osu setrvačníku)

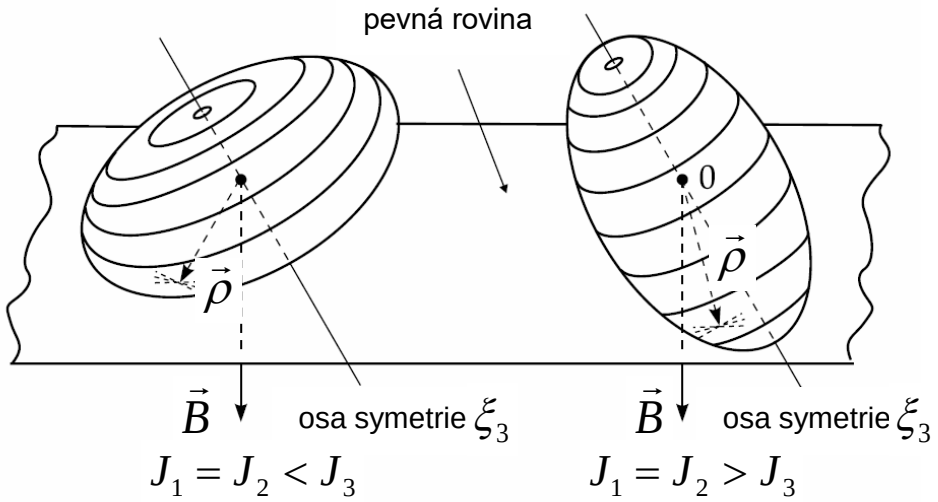
„Gyroscope operation“. Licencováno pod Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gyroscope_operation.gif#mediaviewer/File:Gyroscope_operation.gif

těžký setrvačník upevnění mimo hmotný střed
v tíhovém poli

Shrnutí volného symetrického setrvačníku

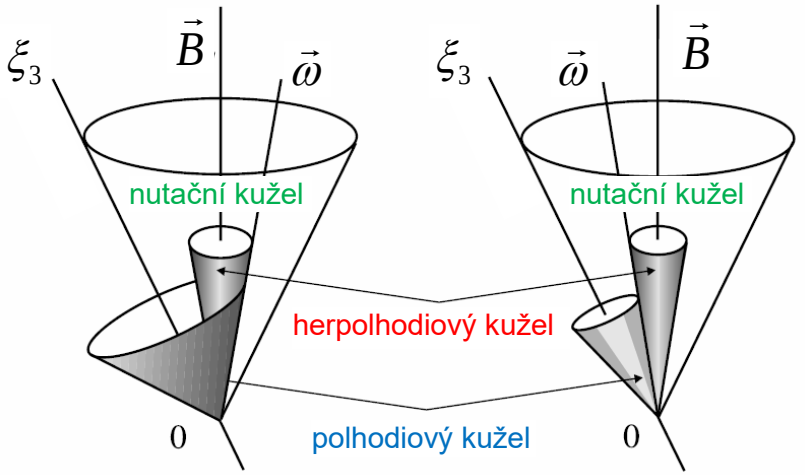
zploštělý elipsoid setrvačnosti

- $J_1 = J_2 < J_3$
- herpolhodiový kužel leží uvnitř polhodiového kužele
- pořadí vektorů $\xi_3 - B - \omega$



protáhlý elipsoid setrvačnosti

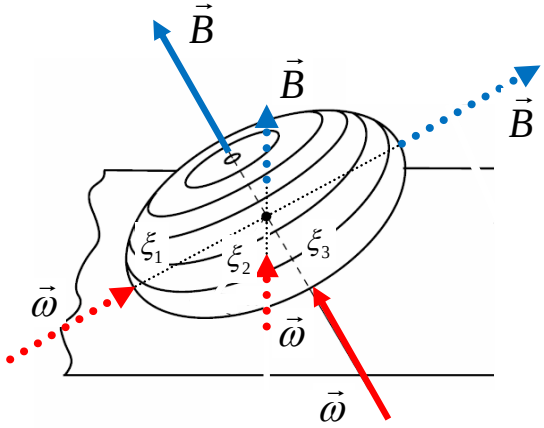
- $J_1 = J_2 > J_3$
- herpolhodiový kužel leží vně polhodiového kužele
- pořadí vektorů $\xi_3 - \omega - B$



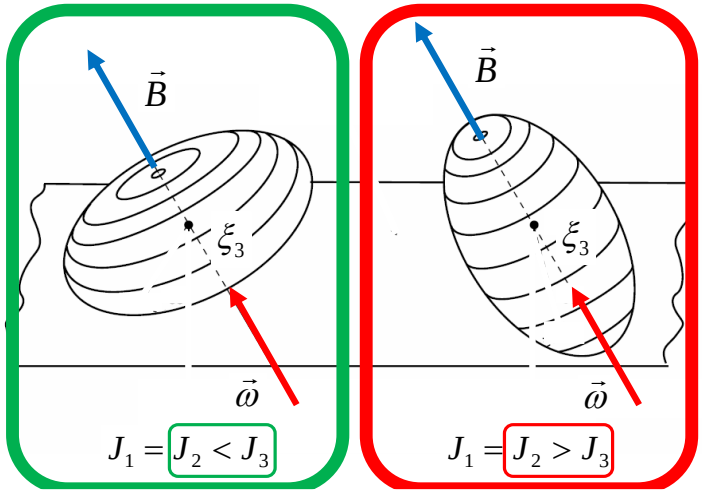
Volný symetrický setrvačník
Stabilita rotace kolem volné osy

Shrnutí výsledků

- symetrický setrvačník při rotaci kolem hlavních os zachovává směr osy rotace (nekoná nutační pohyb) $\Rightarrow$ hlavní osy jsou volnými osami rotace



- z energetického hlediska je stabilní volná rotace kolem té hlavní osy, jíž přísluší větší hodnota momentu setrvačnosti



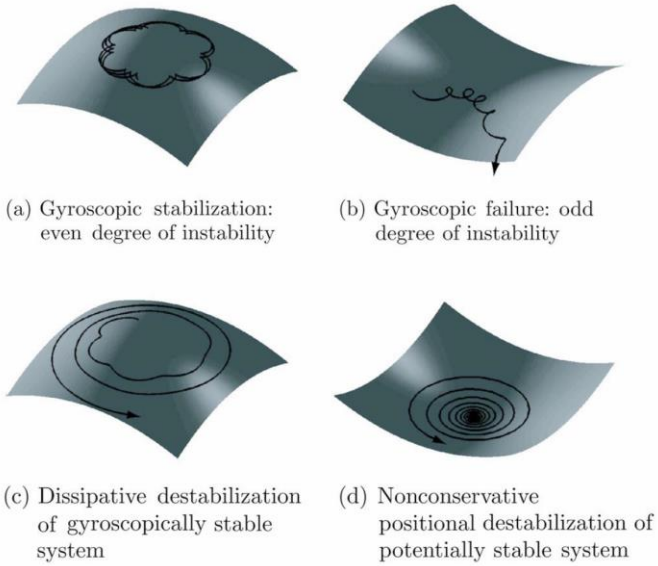
Samovolné ustavení stabilní osy rotace

experiment → rotující těleso libovolného tvaru vlivem náhodného vnějšího působení přejde v rotaci kolem hlavní osy setrvačnosti, vůči které má největší moment setrvačnosti

důsledek teorémů o stabilitě (Thomson-Tait-Četajev) ⇒ systém s nestabilní potenciální energií, který je stabilizován pomocí gyroskopických sil, přestává být stabilním po přidání libovolně malé disipativní síly

a) stabilní (sudý počet nestabilních parametrů)
b) nestabilní (lichý počet nestabilních parametrů)
c) systém stabilizovaný gyroskopicky se doplněním disipativní síly destabilizuje
d) dokonce systém v minimu potenciální energie se může doplněním disipativní síly destabilizovat

R.Kretchenikov, J.E.Marsden: *Dissipation-induced instabilities in finite dimensions*, Rev. Mod. Phys. **79** (2007) 519.



Zajímavé aplikace

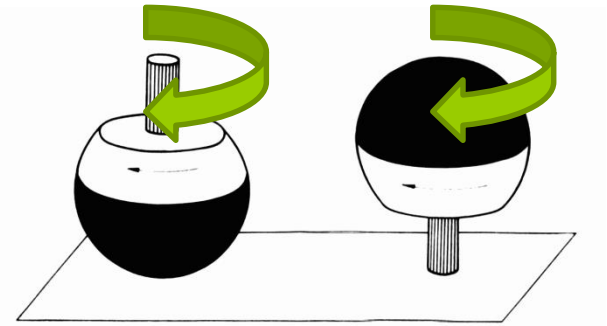
- teorémy Thomson-Tait-Četajev
- významný podíl třecích sil

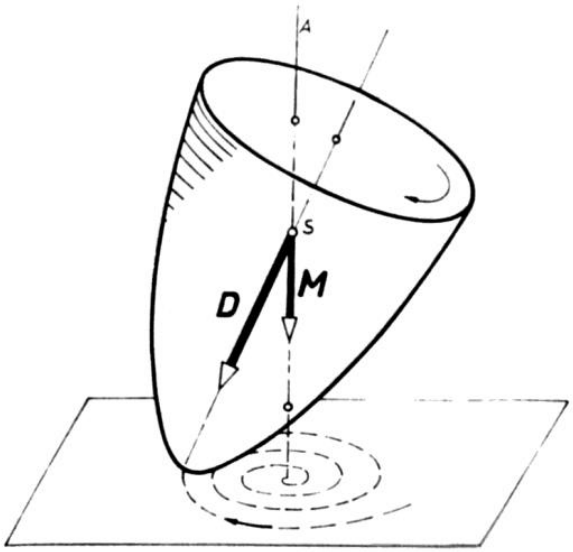
káča, vlček, čamrda

- stabilizace díky tření hrotu
- po spirále se blíží do stabilního stavu
- zároveň třecí síla stabilitu narušuje
- nakonec vlček zpomalí natolik, že ztratí stabilitu

tippe top

- hmotný střed neleží v centru kulové části
- dotykový bod s podložkou leží mimo osu rotace
- tření vytvoří moment sil vedoucí nakonec k obrácení

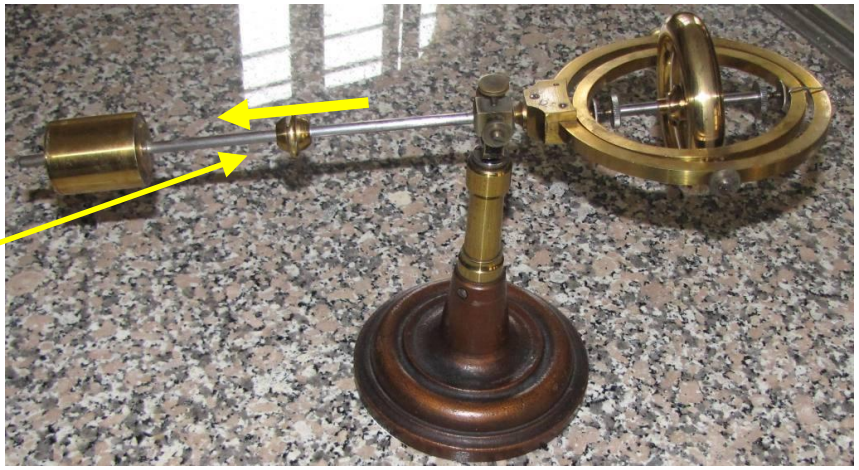


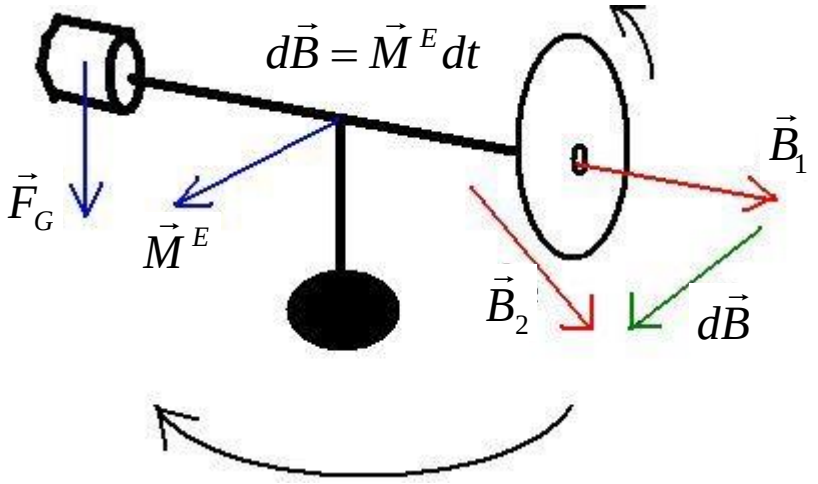


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Snurra_uppochner.gif

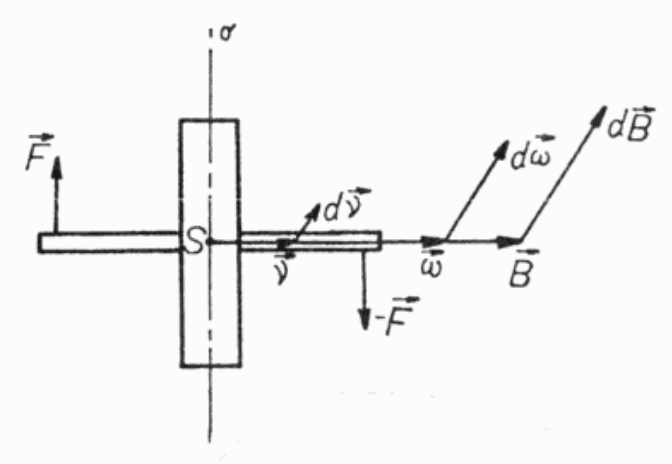
Stáčení osy setrvačníku momentem sil. Precese setrvačníku.

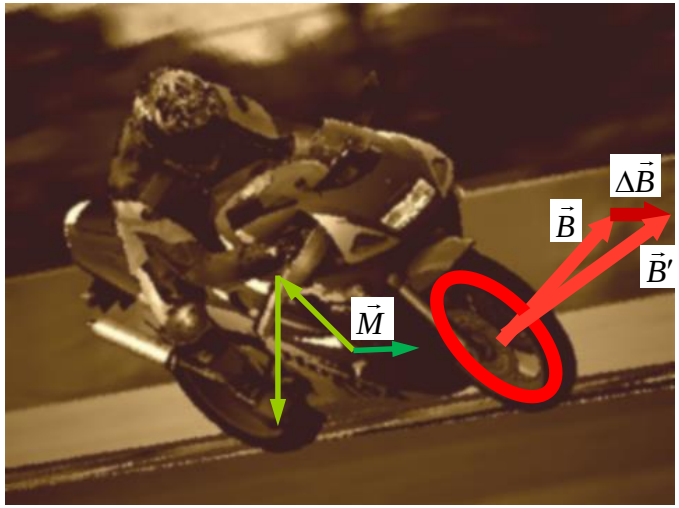
- vyvážení hmotnosti setrvačníku
- roztočení setrvačníku
- vektor momentu hybnosti $\vec{B}_1$ setrvačníku je orientován souhlasně s osou rotace
- posun závaží doleva $\Rightarrow$ na rameno působí síla $\vec{F}_G$, což vyvolá moment síly $\vec{M}^E$
- impuls momentu síly je podle 2. IV roven změně momentu hybnosti
- ta se projeví stáčením osy rotace setrvačníku kolem svislé osy
- stáčení osy setrvačníku vlivem vnějšího momentu sil se nazývá precese





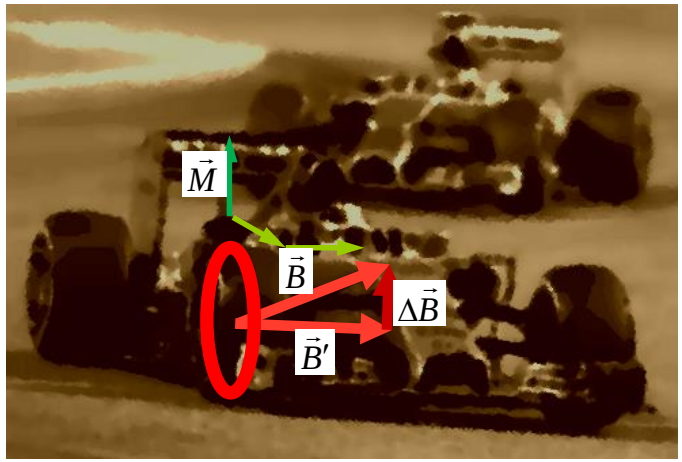
Gyroskopický efekt – stabilita v zatáčce



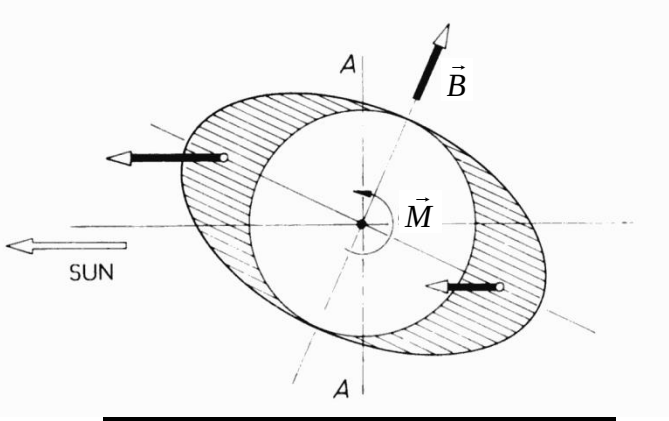


- rotující součásti vozidel ovlivňují stabilitu při zatáčení
- gyroskopický efekt udržuje stabilitu při naklánění do zatáčky
- vozidla, která se nenaklánějí, jsou naopak vyklápěna ven ze zatáčky

- gyrobus – protiběžné setrvačníky



Precese a nutace Země

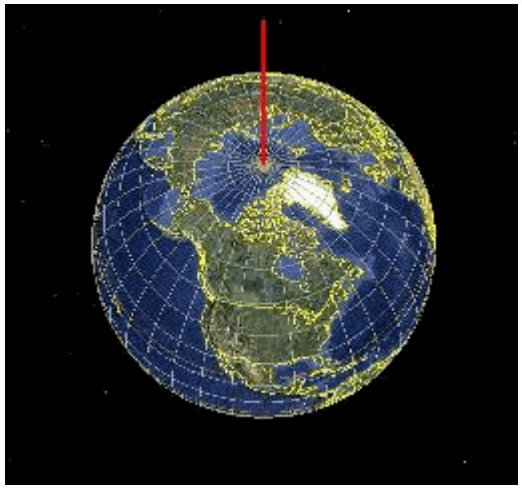


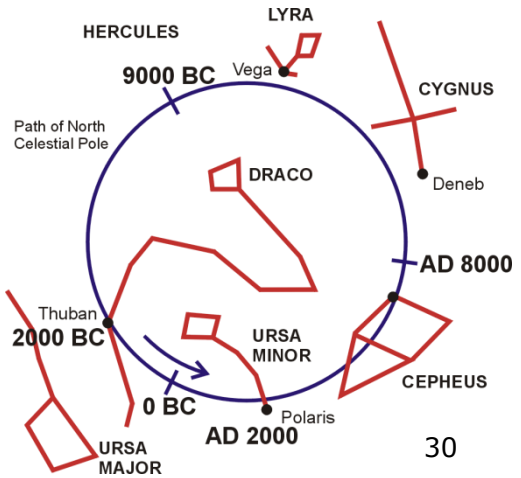
- Země má volnou osu
- nejde ale o volný setrvačník – nerotuje bezsilově
- slapové síly působí na zploštění planety
  - složení gravitačních vlivů Slunce, Měsíce a planet
  - moment sil $\vec{M}$ kolmý k nákresně
- změna momentu hybnosti $\vec{B}$ kolmá k nákresně

$\Rightarrow$ precese vektoru $\vec{B}$ kolem osy A-A

  - osa A-A kolmá k ekliptice, míří do souhvězdí Draka
  - doba oběhu cca 25800 let

- nutace
  - perioda 433 dnů (Chandlerova perioda)
  - amplituda ± 0.2“
  - posun pólu po kružnici průměru 10 m





By Ereenegee (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Precesi%C3%B3n.gif

By Miraceti, original authors: GregBenson and Wereon. [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)], via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3APrecession_starchart.png

Gyroskopický efekt – navigační přístroje...

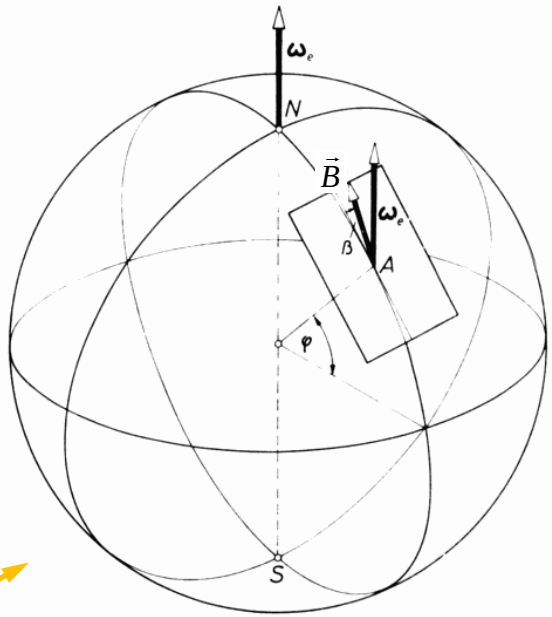
- prostý Kardanův závěs nemusí stačit pro otáčení ve velkém rozsahu (zejména v letadlech)
- uplatňuje se setrvačnost otočných částí závěsu (vs. robustnost konstrukce)

směrový ukazatel (heading indicator)

- volný setrvačník – drží pevný směr (Δ > 0.002 °/min)
- ovlivňován rotací Země $\Rightarrow$ každých 15 minut nutno korigovat směr podle kompasu

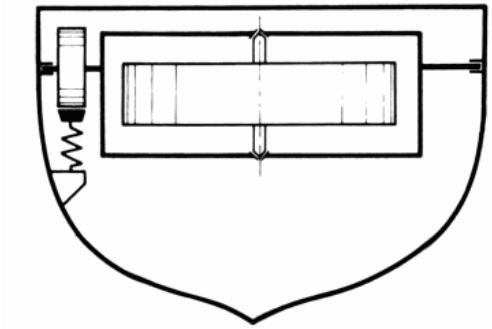
umělý horizont

- těžký setrvačník ve stabilní rovnováze
- osa udržuje „střední hodnotu“ svislého směru



gyrokompas

- osa udržována ve vodorovném směru
- interakce $\vec{B}$ s rotací Země $\vec{\omega}_e$ udržuje směr k severu (nefunguje na pólech)

gyrostat

- tlumí pohyby paluby lodi při vlnobití