I. MECHANIKA

5. Otáčení tuhého tělesa I

Obsah

Otáčení kolem pevné osy

- těleso rotuje kolem osy pevně ukotvené vzhledem k i.s.s.
- 1 stupeň volnosti – stálý směr vektorů $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$ resp. $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$
- platí 2. impulsová věta $$\frac{d}{dt}\vec{B} = \vec{M}^{E}$$
- moment vnější síly lze rozložit na složku $\vec{M}^{E\parallel}$ rovnoběžnou s osou rotace a složku $\vec{M}^{E\perp}$ kolmou k ose: $$\vec{M}^{E} = \vec{M}^{E\parallel} + \vec{M}^{E\perp}$$
- působením momentu $\vec{M}^{E\perp}$ by se měnil směr osy
- $\vec{M}^{E\perp}$ je kompenzován ukotvením osy (vazbová síla)

Moment hybnosti rotujícího hm. bodu

- moment hybnosti $\vec{b}_k$ každého h.b. lze podobně rozložit na složku $\vec{b}_k^{\parallel}$ rovnoběžnou s osou rotace a složku $\vec{b}_k^{\perp}$ kolmou k ose:

$$\vec{b}_k = \vec{b}_k^{\parallel} + \vec{b}_k^{\perp}$$

- využijeme geometrické vlastnosti ($\vec{v}_k = \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k \rightarrow \vec{r}_k \perp \vec{v}_k$):

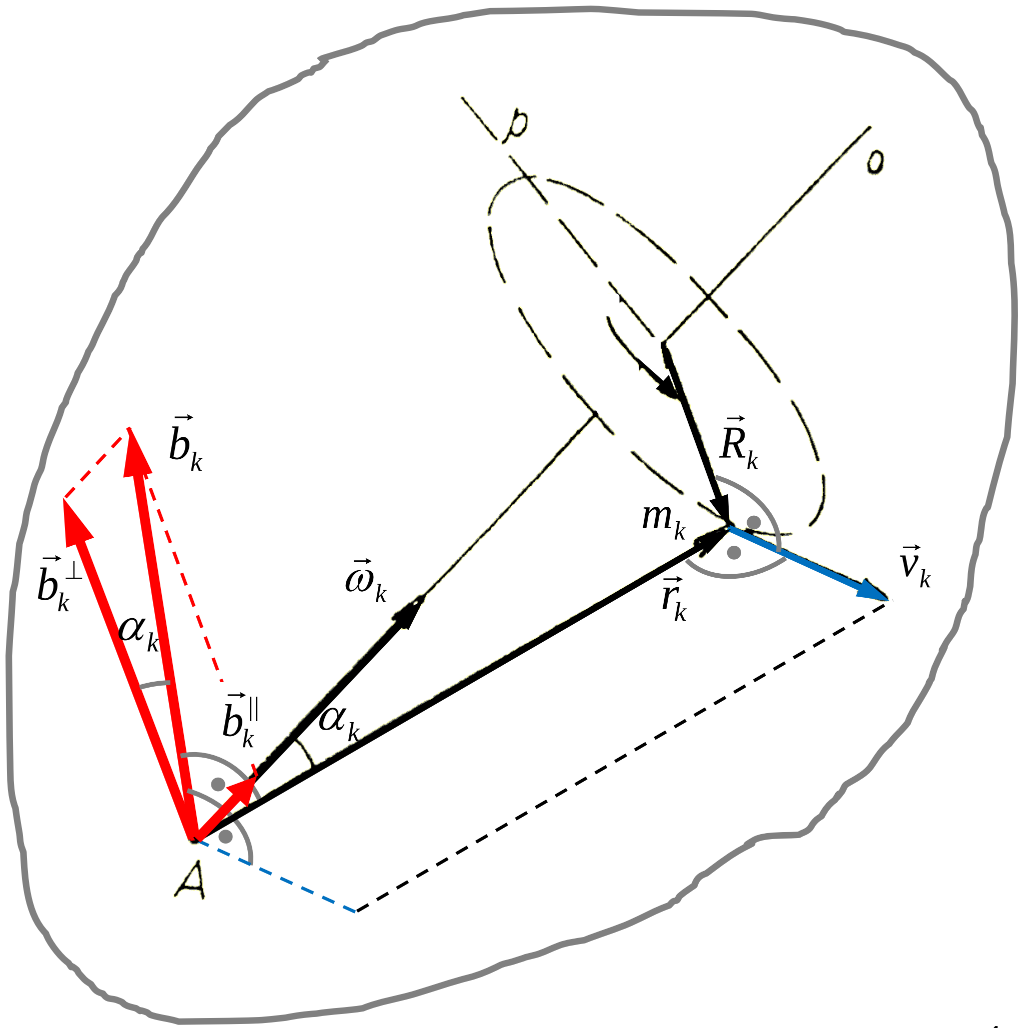
$$b_k = |\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k| = m_k v_k r_k$$

- vektory $\vec{b}_k^{\parallel}, \vec{b}_k^{\perp}, \vec{b}_k, \vec{\omega}_k, \vec{R}_k, \vec{r}_k$ leží v rovině kolmé k vektoru $\vec{v}_k$

- průmět do směru osy otáčení

$$b_k^{\parallel} = b_k \sin\alpha_k = m_k v_k \underbrace{r_k \sin\alpha_k}_{R_k} =$$

$$= m_k \underbrace{v_k}_{R_k \omega_k} R_k = m_k \omega_k R_k^2$$



Pohybová rovnice pro otáčení kolem osy

Předpokládejme, že kolem osy rotuje jediné tuhé těleso, tj. všechny hmotné body rotují stejnou úhlovou rychlostí ω .

- průmět celkového momentu hybnosti $$B^{\|} = \sum_{k=1}^{N} b_k^{\|} = \sum_{k=1}^{N} m_k \omega R_k^2 = \omega \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k R_k^2}_{J} = J\omega$$
- zaveden <u>moment setrvačnosti J vůči ose</u> $$B^{\|} = J\omega$$
- moment setrvačnosti s.h.b. vůči ose $$J = \sum_{k=1}^{N} m_k R_k^2$$
- pro tuhé těleso ($R(\vec{r})$ vzdálenost od osy) $$J = \int_V \rho(\vec{r})\left[R(\vec{r})\right]^2 dV$$
- průmět 2. impulsové věty do směru osy $$\frac{d}{dt} B^{\|} = M^{E\|}$$
- i pro volné soustavy ($J \neq \mathrm{konst}$) platí $$\frac{d}{dt}(J\omega) = M^{E\|}$$
- pro tuhé soustavy ($J = \mathrm{konst}$) platí $$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M^{E\|}$$

Obecný tvar pohybové rovnice

- pohybová rovnice pro otáčení kolem osy $$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M^{E\|}$$
- má obdobnou strukturu jako 2.NZ $$m\frac{d^2r}{dt^2} = F$$
- obecná struktura pohybových rovnic:

  konstantní vlastnost objektu $\times$ charakteristika pohybu = vnější silové působení

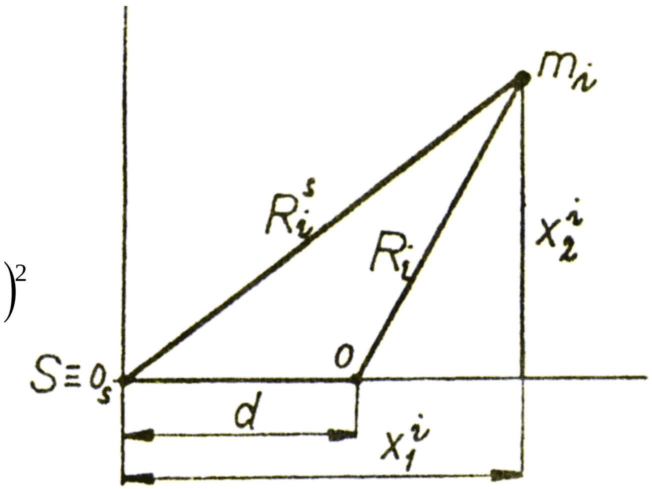
Zákon zachování momentu hybnosti

zobecníme předchozí odvození na případ, kdy hmotné body mohou kolem společné osy rotovat různými úhlovými rychlostmi

- průmět celkového momentu hybnosti $$B^{\|} = \sum_{k=1}^{N} b_k^{\|} = \sum_{k=1}^{N} m_k \omega_k R_k^2$$
- průmět 2. impulsové věty do směru osy $$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \omega_k R_k^2\right) = M^{E\|}$$
- pokud moment vnější ch sil nulový (ZZMH) $$\sum_{k=1}^{N} m_k \omega_k R_k^2 = \text{konst.}$$
- pro soustavu složenou z několika tuhých těles $$\sum_{k=1}^{N} J_k \omega_k = \text{konst.}$$

Steinerova věta

- osa otáčení o_s prochází hmotným středem tělesa
- osa otáčení o ve vzdálenosti d rovnoběžná s osou o_s
- zvolme kartézskou soustavu souřadnic dle nákresu



- moment setrvačnosti vzhledem k ose o_s $\quad J_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(R_i^s\right)^2$
- moment setrvačnosti vzhledem k ose o $\quad J = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$
- vzdálenost *i*-tého hm. bodu od osy o_s $\quad \left(R_i^s\right)^2 = \left(x_1^i\right)^2 + \left(x_2^i\right)^2$
- vzdálenost *i*-tého hmotného bodu od osy o $\quad R_i^2 = \left(x_1^i - d\right)^2 + \left(x_2^i\right)^2$
- spojením předchozích vyloučíme x_2^i $\quad R_i^2 = \left(R_i^s\right)^2 - \left(x_1^i\right)^2 + \left(x_1^i - d\right)^2$
- vypočteme čtverec a upravíme $\quad R_i^2 = \left(R_i^s\right)^2 - \cancel{\left(x_1^i\right)^2} + \cancel{\left(x_1^i\right)^2} - 2x_1^i d + d^2$
- moment setrvačnosti vůči ose o

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(R_i^s\right)^2}_{J_s} - 2d \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i x_1^i}_{M x_1^s = 0} + d^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{M}$$

Steinerova věta

- dostali jsme rovnici $$J = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(R_i^s\right)^2}_{J_s} - 2d \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i x_1^i}_{M x_1^s = 0} + d^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{M}$$
- protože x_1^s představuje první souřadnici hmotného středu a ten leží v počátku, bude předposlední člen roven nule $$x_1^s = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_1^i}{M}$$
- výsledný vztah $$J = J_s + M d^2$$

Steinerova věta: Moment setrvačnosti vůči libovolné ose o je roven součtu momentu setrvačnosti vůči ose o_S procházející hmotným středem tělesa rovnoběžně s osou o a součinu hmotnosti tělesa se čtvercem vzdálenosti obou os.

Důležité:

- osy o a o_S jsou rovnoběžné
- osa o_S prochází hmotným středem

Kinetická energie při otáčení kolem osy

Víme: Pro soustavu hmotných bodů pohybujících se individuálními rychlostmi $\vec{v}_{cn}$ vůči hmotnému středu soustavy, který se vůči počátku inerciální s.s. pohybuje rychlostí $\vec{v}_s$, platí Königova věta

$$E_k = \frac{1}{2}\vec{v}_s^{\,2} M + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \vec{v}_{cn}^{\,2}}_{E_{kI}}$$

tuhé těleso se otáčí kolem pevné osy úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$

<u>a) osa prochází hmotným středem, ten je v klidu vůči I.s.s.</u>

- kinetická energie je rovna vnitřní kinetické energii rotující soustavy h.b.

$$E_k = E_{kI} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \vec{v}_{cn}^{\,2}$$

- rychlost hmotného bodu vůči hm. středu $\vec{v}_{cn} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{cn}$
- velikost rychlosti pomocí vzdálenosti bodu od osy $v_{cn} = \omega R_n$
- kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n R_n^2}_{J_s} \omega^2 = \frac{1}{2} J_s \omega^2$$

Kinetická energie při otáčení kolem osy

Víme, že osu otáčení můžeme přemístit do libovolně zvoleného bodu A tělesa – rychlost $\vec{v}_n$ hmotného bodu vůči I.s.s. bude pak složena z okamžité rychlosti tohoto zvoleného bodu $\vec{v}_A$ a z rotační složky, v níž vystupuje vždy stejná hodnota $\vec{\omega}$ (Chaslesova věta)

$$\vec{v}_n = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{An}$$

<u>b) osa v klidu vůči I.s.s., neprochází hm. středem</u>

- zvolíme za vztažný bod hmotný střed tělesa – tj. uvažujeme rotaci kolem hmotného středu, který se otáčí kolem aktuální osy rotace
- rychlost *n*-tého hmotného bodu vůči I.s.s. $\vec{v}_n = \vec{v}_s + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{cn}}_{\vec{v}_{cn}}$
- podle Königovy věty se kinetická energie bude skládat z vnitřní kinetické energie vůči hmotnému středu a z kinetické energie hmotného středu

$$E_k = \frac{1}{2}\vec{v}_s^{\,2} M + E_{kI}$$

- vnitřní kinetická energie (viz bod a) $E_{kI} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n R_n^2}_{J_s}\omega^2 = \frac{1}{2} J_s \omega^2$

Kinetická energie při otáčení kolem osy

- hmotný střed se otáčí společně s tělesem úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$
- rychlost pohybu hmotného středu kolem skutečné osy rotace lze vyjádřit pomocí vzdálenosti R_s hmotného středu od osy

$$v_s = \omega R_s$$

- celková kinetická energie

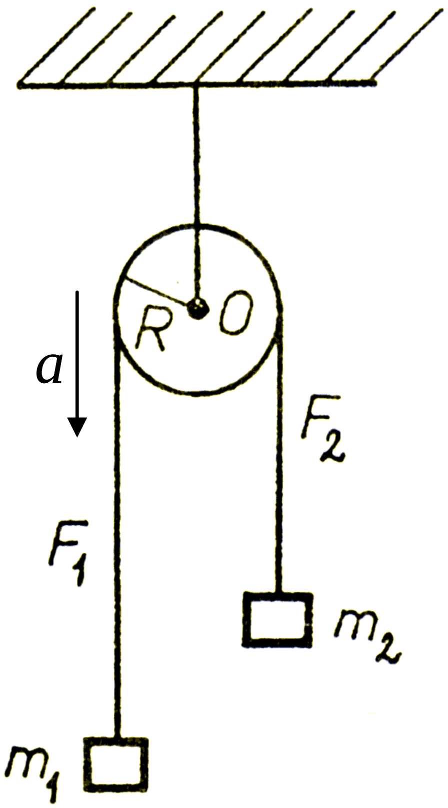
$$E_k = \frac{1}{2} M R_s^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_s \omega^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(M R_s^2 + J_s \right)}_{J} \omega^2$$

- podle Steinerovy věty představuje J moment setrvačnosti vůči aktuální ose otáčení

Závěr: Výraz $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$ je obecným vyjádřením kinetické energie tělesa otáčejícího se kolem pevné osy.

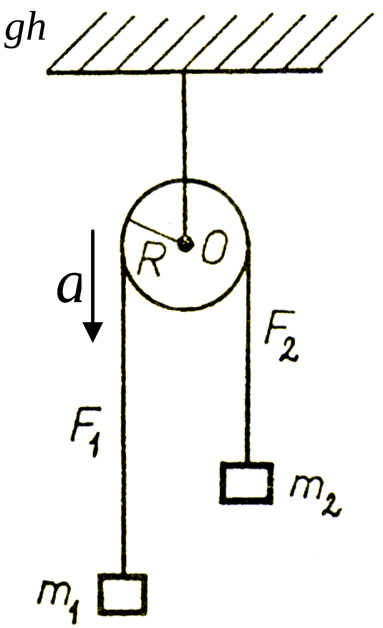
Těžká kladka

- pohybová rovnice (2. imp. věta) $J\dfrac{d\omega}{dt} = R(F_1 - F_2)$
- výsledná síla působící na levé závaží $m_1 a = m_1 g - F_1$
- výsledná síla působící na pravé závaží $m_2 a = F_2 - m_2 g$
- obvodová rychlost a úhlová rychlost $v = R\omega$
- derivací získáme vztah mezi zrychleními $a = R\dfrac{d\omega}{dt}$
- dosazeno do pohybové rovnice $J\dfrac{a}{R} = R(m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a)$
- úprava $J\dfrac{a}{R^2} + m_1 a + m_2 a = m_1 g - m_2 g$
- úprava $(\dfrac{J}{R^2} + m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g$
- vyjádřeno zrychlení $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{\dfrac{J}{R^2} + m_1 + m_2}$
- dif. rovnice pro úhlovou rychlost $a = R\dfrac{d\omega}{dt} \;\rightarrow\; d\omega = \dfrac{a}{R}dt$
- proměnné separované, integrace $\int d\omega = \int \dfrac{a}{R}dt \;\rightarrow\; \omega = \dfrac{a}{R}t + \omega_0 \;\rightarrow\; \varphi = \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{R}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$



Těžká kladka – alternativně pomocí ZZME

- nárůst pot. energie při poklesu levého závaží o *h* $\Delta E_p = -m_1 gh + m_2 gh$
- získaná kinetická energie $\Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$
- ZZME $\Delta E_k = -\Delta E_p$
- obvodová rychlost a úhlová rychlost $v = R\omega$
- dosazení do ZZME $\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J \frac{v^2}{R^2} = m_1 gh - m_2 gh$
- úprava $\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}\right) v^2 = (m_1 - m_2) gh$
- rychlost v závislosti na *h* $v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2) gh}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}}$
- rychlost v závislosti na dráze $\left.\begin{array}{l} h = \frac{1}{2} at^2 \\ v = at \end{array}\right\} h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} \rightarrow v = \sqrt{2ah}$
- porovnáním získáme zrychlení $a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$



Valení po nakloněné rovině

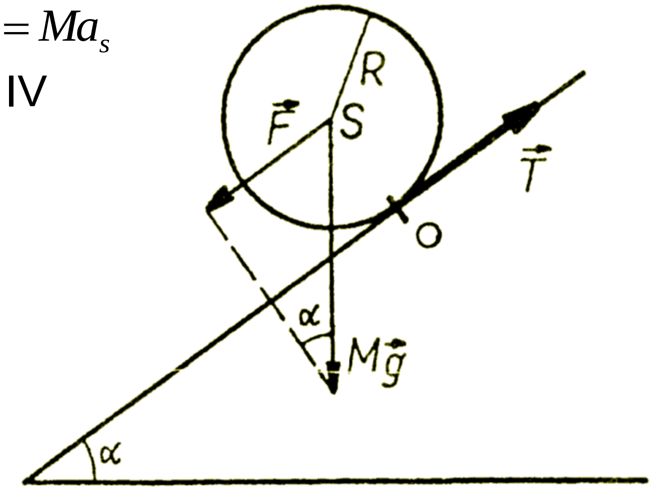
- pohybová rovnice pro hm. střed $\vec{F}^{E} = M\vec{a}_s$
- vnější síly jsou průmět tíhy do směru pohybu a síla tření

$$Mg\sin\alpha - T = Ma_s$$

- druhý neznámý parametr (třecí síla) vychází z 2. IV

$$J\frac{d\omega}{dt} = TR$$

- vztah posuvné a úhlové rychlosti $v_s = R\omega$
- vztah mezi zrychleními $a_s = R\dfrac{d\omega}{dt}$
- dosazením do druhé rovnice $J\dfrac{a_s}{R^2} = T$
- dosazením do první rovnice $Mg\sin\alpha - J\dfrac{a_s}{R^2} = Ma_s$
- lze vyjádřit zrychlení $a_s = \dfrac{Mg\sin\alpha}{M + \dfrac{J}{R^2}}$



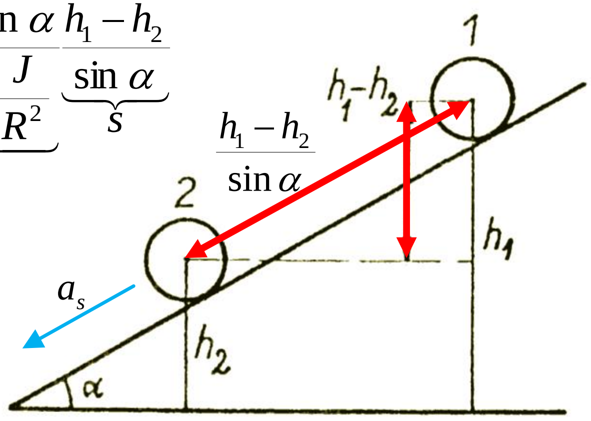
Závěr: čím větší J nebo menší poloměr, tím pomalejší pohyb

Poznámka k třecí síle: Povrch těles chápeme jako ideálně hladký, takže zde žádné disipativní třecí síly nevystupují, nicméně bez idealizované statické třecí síly by se válec po nakloněné rovině smýkal a neplatil by tak vztah mezi posuvnou rychlostí a rychlostí rotace.

Valení po nakloněné rovině - ZZME

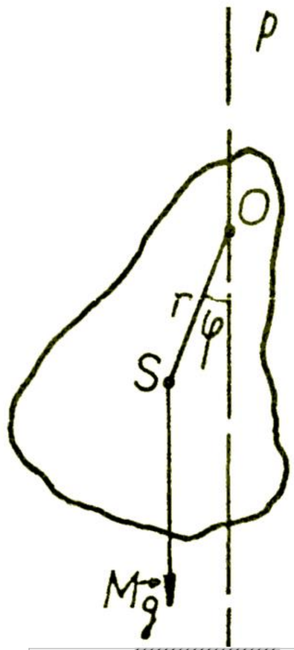
posun z výšky h_1 do výšky h_2

- h_1: potenciální energie $\quad E_p(h_1) = Mgh_1$
- h_2: kinetická energie $\quad E_k(h_2) = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$
- h_2: potenciální energie $\quad E_p(h_2) = Mgh_2$
- ZZME $\quad Mgh_1 = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + Mgh_2$
- úpravy $\quad Mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}J\frac{v_s^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{J}{R^2}\right)v_s^2$
- rychlost v záv. na výšce $\quad v_s = \sqrt{\dfrac{2Mg(h_1 - h_2)}{M + \frac{J}{R^2}}} = \sqrt{2\underbrace{\dfrac{Mg\sin\alpha}{M + \frac{J}{R^2}}}_{a_s}\underbrace{\dfrac{h_1 - h_2}{\sin\alpha}}_{s}}$
- posunutí podél nakl. roviny $\quad s = \dfrac{h_1 - h_2}{\sin\alpha}$
- zrychlení podél nakl. roviny $\quad a_s = \dfrac{Mg\sin\alpha}{M + \frac{J}{R^2}}$

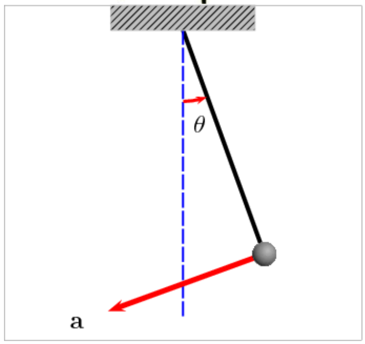


Fyzické kyvadlo

tuhé těleso v tíhovém poli zavěšeno na vodorovné ose neprocházející hm. středem – fyzické kyvadlo



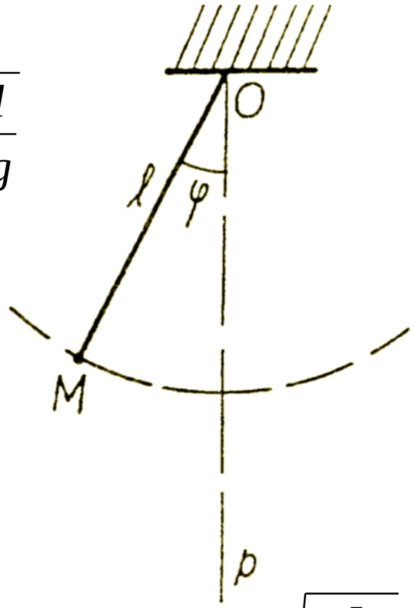
- 2. imp. věta $J\dfrac{d\omega}{dt} = -Mgr\sin\varphi$
- mínus v rovnici – moment síly působí zrychlení proti výchylce φ
- úhlovou rychlost vyjádřit pomocí úhlové výchylky $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} \to \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$
- pohybová rovnice $J\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgr\sin\varphi$
- řešení komplikované – nebudeme provádět
- zjednodušení pro malé úhly φ, kde $\sin\varphi \doteq \varphi$ $\quad J\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgr\varphi$
- rovnice ve tvaru jako pro harmonický kmit $\Rightarrow$ řešení $\varphi = \Phi\sin(\Omega t + \alpha)$
- platí $(\sin x)'' = -\sin x$, a proto $-J\Phi\Omega^2\sin(\Omega t + \alpha) = -Mgr\Phi\sin(\Omega t + \alpha)$
- po zjednodušení $J\Omega^2 = Mgr$
- úhlová frekvence kmitů Ω je konstanta $\Omega = \sqrt{\dfrac{Mgr}{J}}$
- !!! nesměšovat s proměnnou úhlovou rychlostí otáčení kyvadla $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} \neq \Omega$
- doba kmitu kyvadla (dvojnásobek doby kyvu) $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Mgr}}$



http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AOscillating_pendulum.gif

Matematické kyvadlo

- hmotnost soustředěna v jediném h.b. hmotnosti *M*, nehmotný závěs délky *l*
- moment setrvačnosti h.b. $J = Ml^2$
- vzdálenost hm. středu od osy otáčení $r = l$
- doba kmitu matematického kyvadla $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Ml^2}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$
- problémy dělá praktická realizace závěsu:
  - vlastní hmotnost nitě
  - nedrží rovinu kmitu



Redukovaná délka fyzického kyvadla

- se nazývá výraz $l_r = \dfrac{J}{Mr}$, který má rozměr délky
- s tímto označením přejde rovnice pro periodu kmitu fyzického kyvadla $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Mgr}}$

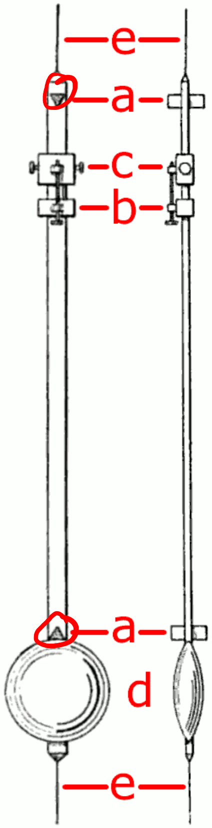
  na tvar formálně shodný s rovnicí pro periodu kmitu matematického kyvadla

  $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

Reverzní kyvadlo

- kyvadlo lze užít k měření tíhového zrychlení
- problém s realizací „nehmotného“ závěsu a s určením jeho přesné délky
- fyzické kyvadlo – lepší reprodukovatelnost měření
- nutno přesně stanovit redukovanou délku fyzického kyvadla
- redukovanou délku lze přesně určit v případě tzv. reverzního kyvadla

Má-li těleso (reverzní kyvadlo) dvě rovnoběžné osy nestejně vzdálené od hmotného středu, vůči kterým kýve (malými kmity) se stejnou periodou, přičemž hmotný střed leží v rovině určené osami, pak vzdálenost os je rovna redukované délce kyvadla.



Možné technické řešení:

- tyč s dvěma pevnými osami (a) a závažím (d)
- po tyči lze posouvat přívažek (c) a tím posouvat hm. střed
- závaží se šroubem (b) „vyladí“ tak, aby doby kmitu byly shodné
- pak je vzdálenost os rovna redukované délce
- perioda v naladěném stavu slouží pro výpočet tíhového zrychlení

Princip reverzního kyvadla

- mějme těleso, které může kývat na dvou rovnoběžných osách
- osy O a O' budiž ve vzdálenostech r a r' od hm. středu
- budeme zkoumat, za jakých podmínek budou mít malé kmity stejnou periodu pro obě osy
- perioda pro osu O $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Mgr}}$
- perioda pro osu O' $\quad T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{J'}{Mgr'}}$
- bude platit $T' = T$, pokud $\quad \dfrac{J'}{r'} = \dfrac{J}{r}$
- podle Steinerovy věty $\quad J = J_s + Mr^2, \quad J' = J_s + Mr'^2$
- dosazením $\quad \dfrac{J_s + Mr'^2}{r'} = \dfrac{J_s + Mr^2}{r}$
- upraveno na rovnici pro neznámé r' $\quad r'^2 - r'\dfrac{J_s + Mr^2}{Mr} + \dfrac{J_s}{M} = 0$
- zřejmé řešení $r_1' = r$ vyhovuje pro všechny osy ve vzdálenosti *r* od hm. středu
- druhé řešení z vlastností kvadratické rovnice $\quad r_1' + r_2' = \dfrac{J_s + Mr^2}{Mr} = \dfrac{J}{Mr} = l_r$
- součet obou řešení roven redukované délce kyvadla $\quad r_1' + r_2' = r + r_2' = l_r$
- druhým řešením jsou opět všechny osy ve vzdálenosti $r_2' = l_r - r$ od hm. středu