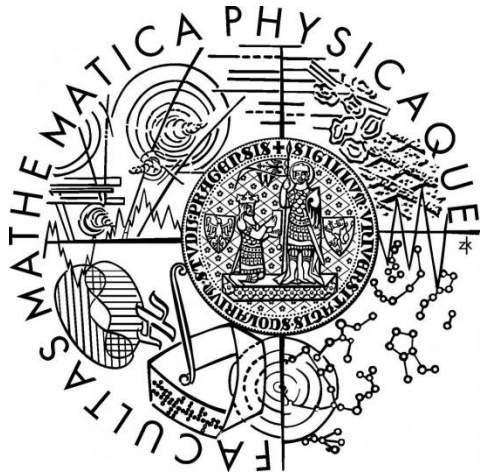


# I. MECHANIKA

## 4. Soustava hmotných bodů II



# Obsah

---

- Spojité rozložení hmotnosti.
- Počet stupňů volnosti.
- Kinematika tuhého tělesa.
- Zjednodušení popisu – rotace kolem osy a pevného bodu.
- Chaslesova věta.
- Dynamika tuhého tělesa.
- První a druhá impulsová věta.
- Zjednodušení soustav sil
  - posun referenčního bodu
  - přenesení působiště síly
  - skládání sil
  - umístění momentu dvojice sil
  - přenesení působiště do hmotného středu (doplnění momentu)
- Rovnováha

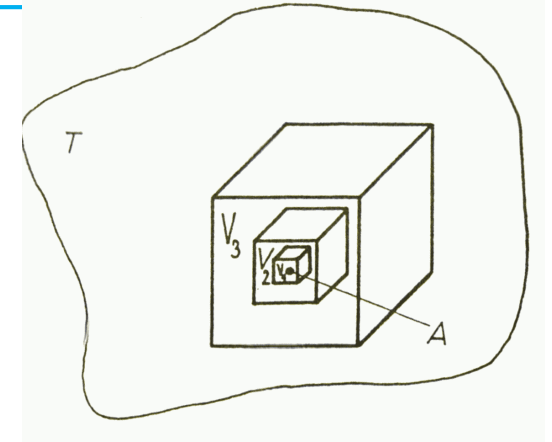
# Co rozumíme tuhým tělesem

---

- abstrakce reálného tělesa
- rozšíření tuhé soustavy hmotných bodů – vzájemné vzdálenosti jednotlivých bodů se nemění při libovolných silách působících na těleso
- vhodné pro
  - studium rotací
  - pokud nelze zanedbat konečné rozměry reálných těles
- nezahrnuje vlastnosti
  - pružné
  - reologické

# Spojité rozložení hmotnosti

- hustota stanovena limitním přechodem  $\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$
- při správné interpretaci symbolů lze užít derivaci  $\rho = \frac{dm}{dV}$
- těleso zadáno rozložením hustoty  $\rho(\vec{r})$
- mimo těleso  $\rho(\vec{r}) = 0$
- celková hmotnost soustavy  $M = \int_V \rho(\vec{r}) dV \left( = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV \right)$



veškerá vyjádření pro soustavu hmotných bodů, kde vystupují sumace přes hmotné body, se pro tuhé těleso mění na prostorové integrály

- obecně:
- diskrétní veličina  $\dots a_n \rightarrow$  spojitá veličina  $a(\vec{r})$
- suma  $\dots \sum_{n=1}^N m_n a_n \rightarrow$  prostorový integrál  $\int_V a(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV$
- poloha hm. středu  $\dots \vec{r}_s = \frac{\sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n}{\sum_{n=1}^N m_n} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n \rightarrow \vec{r}_s = \frac{\int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$

# Počet stupňů volnosti

Tuhá soustava h.b. má 6 stupňů volnosti

- 3 body neležící v přímce (9 stupňů volnosti)
- 3 pevné vzdálenosti mezi nimi (3 vazební podmínky)

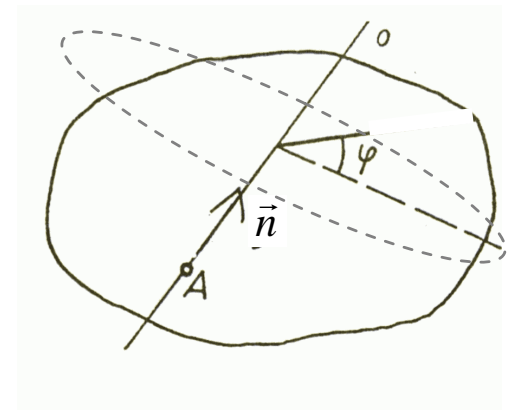
Pro kinematické úvahy se užívá tato skupina parametrů:

- poloha jednoho pevného bodu  $A$  v tělese (3 souřadnice)
- osa  $o$  procházející tímto bodem (směr určen 2 parametry – 2 směrové úhly nebo 2 nezávislé

souřadnice  $n_1$  a  $n_2$  směrového vektoru  $\vec{n}$ ; pro jednotkový směrový vektor platí

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1)$$

- úhel natočení  $\varphi$  tělesa kolem osy (úhel mezi přímkou pevnou v tělese a přímkou pevnou v prostoru)



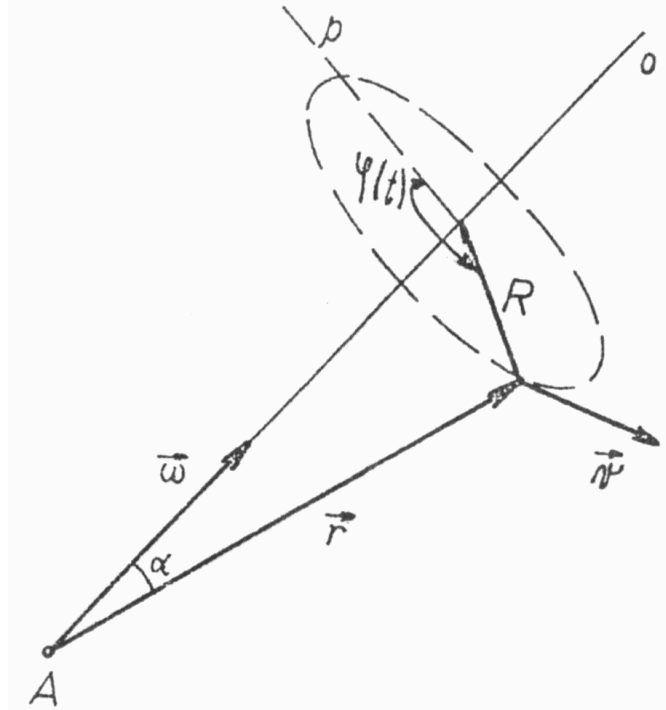
# Pohyb tuhého tělesa – kinematika

## otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy

- bod  $A$  a jím procházející osa  $o$  zachovávají v tělese i prostoru stálou polohu
- časově proměnná veličina  $\varphi = \varphi(t)$
- všechny body (s výjimkou bodů na ose) konají kruhový pohyb se společnou úhlovou

rychlostí  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  v rovině kolmé k ose  $o$

- rotaci určuje vektor  $\vec{\omega}$ , rychlost bodu s polohovým vektorem  $\vec{r}$  bude  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
- vektory úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{r}$  a  $\vec{v}$  tvoří pravotočivý systém



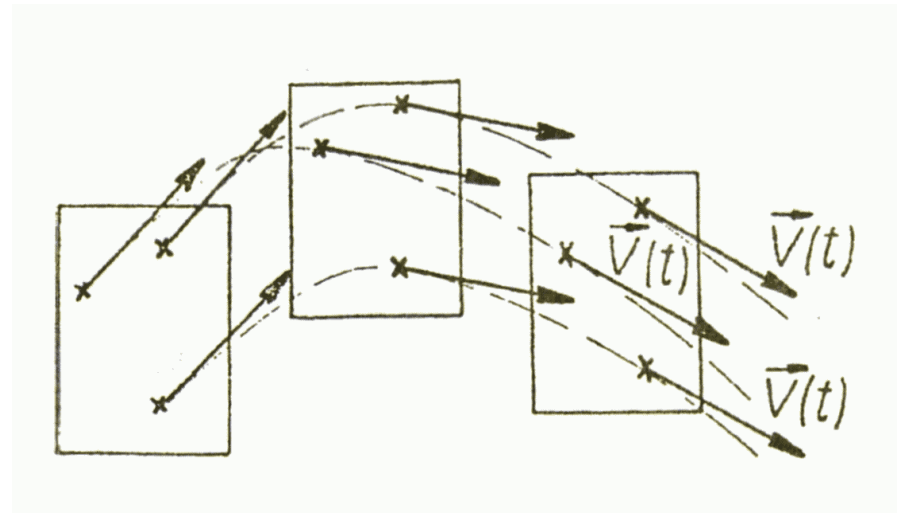
# Pohyb tuhého tělesa – kinematika

## otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu

- východiskem je *Eulerova věta*: „Otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu lze v každém okamžiku vyjádřit jako otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy procházející pevným bodem.“
- rotaci určuje vektor  $\vec{\omega}(t)$
- rychlost bodu s polohovým vektorem  $\vec{r}$  bude  $\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$
- průběžně se mění jak směr osy otáčení, tak velikost úhlové rychlosti

## translace (pohyb posuvný, postupný)

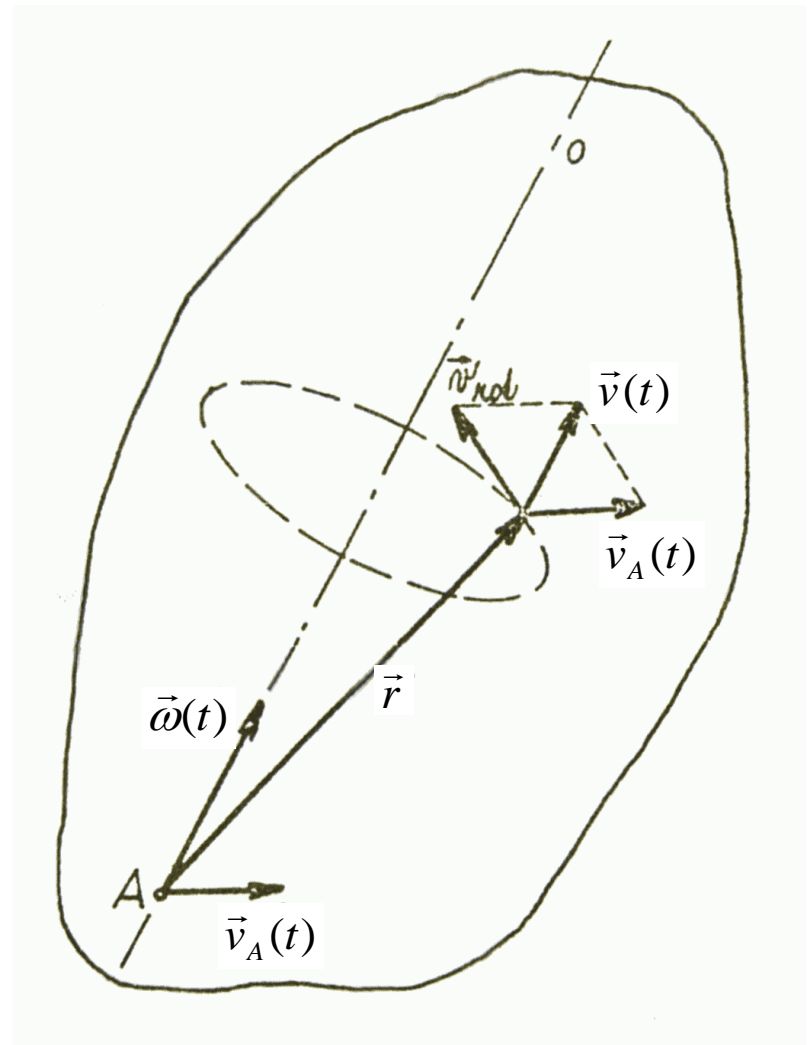
- rychlost  $\vec{v} = \vec{V}(t)$  všech bodů tělesa je v každém okamžiku stejná
- trajektorie posunuté vzhledem k počáteční poloze bodů



# Pohyb tuhého tělesa – kinematika

## libovolný pohyb

- východiskem je *Chaslesova věta* ([šál] Michel Chasles, 1793 – 1880, Francie, matematik): „Libovolný pohyb tuhého tělesa lze složit z translace a rotace kolem pevného bodu.“
- translace popsána pomocí rychlosti  $\vec{v}_A(t)$  referenčního bodu  $A$
- rotaci určuje vektor  $\vec{\omega}(t)$ , rychlost bodu s polohovým vektorem  $\vec{r}$  bude
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_A(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$$
- poloha bodu  $A$  v tělese není omezena (často hmotný střed)





# Pohyb tuhého tělesa – kinematika

jak souvisí parametry pro různé volby?

- rychlosti bodů  $A$  a  $A'$  jsou obecně různé  $\vec{v}_A \neq \vec{v}'_A$
- úhlové rychlosti jsou stejné  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$
- důkaz:

- vyjádření rychlosti bodu  $X$  tělesa pomocí různých referenčních bodů:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = \vec{v}'_A + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$$

- vyjádření rychlosti bodu  $A'$  pomocí referenčního bodu  $A$ :  $\vec{v}'_A = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{a}$
- do vyjádření rychlosti bodu  $X$  pomocí referenčního bodu  $A$  zavedeme vztah mezi vektory  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$

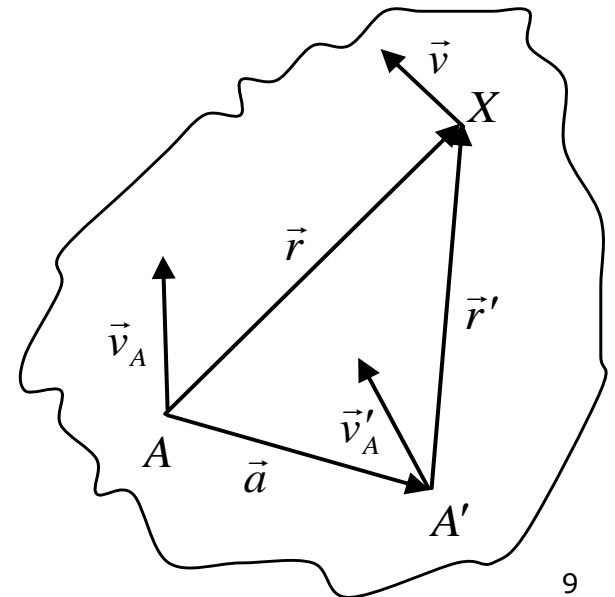
$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{r}') = \\ &= \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{a}}_{\vec{v}'_A} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}'_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'\end{aligned}$$

- platí tedy současně:

$$\vec{v} = \vec{v}'_A + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}'_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

- porovnáním:  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$  q.e.d.



# Pohyb tuhého tělesa – kinematika

---

Důležité:

- funkce  $\vec{v}_A = \vec{v}_A(t)$  a  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$  určují rychlost v bodě  $\vec{r}$ , ale ne trajektorii
- určení trajektorie z těchto funkcí není obecně jednoduché

Problém:

- $\vec{r}$  pevný v tělese – je to skutečně polohový vektor určitého bodu, jenže funkci  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  neznáme, dokud neurčíme trajektorii tělesa
- jiná možnost:  $\vec{r}$  pevný v prostoru – ukazuje pro různá  $t$  na různé body tělesa

# Dynamika tuhého tělesa

pohybové rovnice soustavy hmotných bodů

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}^E \quad 1. \text{ impulsová věta}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{B} = \vec{M}^E \quad 2. \text{ impulsová věta}$$

6 skalárních rovnic  $\rightarrow$  6 nezávislých funkcí např.  $\vec{v}_A = \vec{v}_A(t)$  a  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

1. impulsová věta  $\rightarrow$  věta o pohybu hmotného středu soustavy  $M\vec{a}_s = \vec{F}^E$ ,  
referenční bod  $A$  umístíme do hmotného středu soustavy, dále budeme značit

$\vec{v}_A \rightarrow \vec{v}_s$ , dostaneme rovnici pro  $\vec{v}_s$ :  $M \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \vec{F}^E$ , jejím řešením bude  $\vec{v}_s = \vec{v}_s(t)$

*Hmotný střed soustavy se pohybuje jako h.b., který má hmotnost rovnu celkové hm. soustavy a na nějž působí výslednice vnějších sil  $\vec{F}^E$  působících na soustavu.*

$\rightarrow$  možnost studovat metodami dynamiky hmotného bodu

$\rightarrow$  např. těleso v tíhovém poli – hm. střed se pohybuje po trajektorii některého vrhu

2. impulsová věta – analogickou rovnicí pro  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$  není zdaleka tak snadné získat

# Zjednodušení sil působících na těleso

---

$$\vec{F}^E = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^E$$

$$\vec{M}^E = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E = \sum_{i=1}^N M_i^E$$

různé soustavy vnějších sil, jejichž  $\vec{F}^E$  a  $\vec{M}^E$  (vyjádřený vzhledem k témuž bodu) jsou stejné, mají na stejné těleso stejný dynamický účinek, tj. jsou dynamicky ekvivalentní

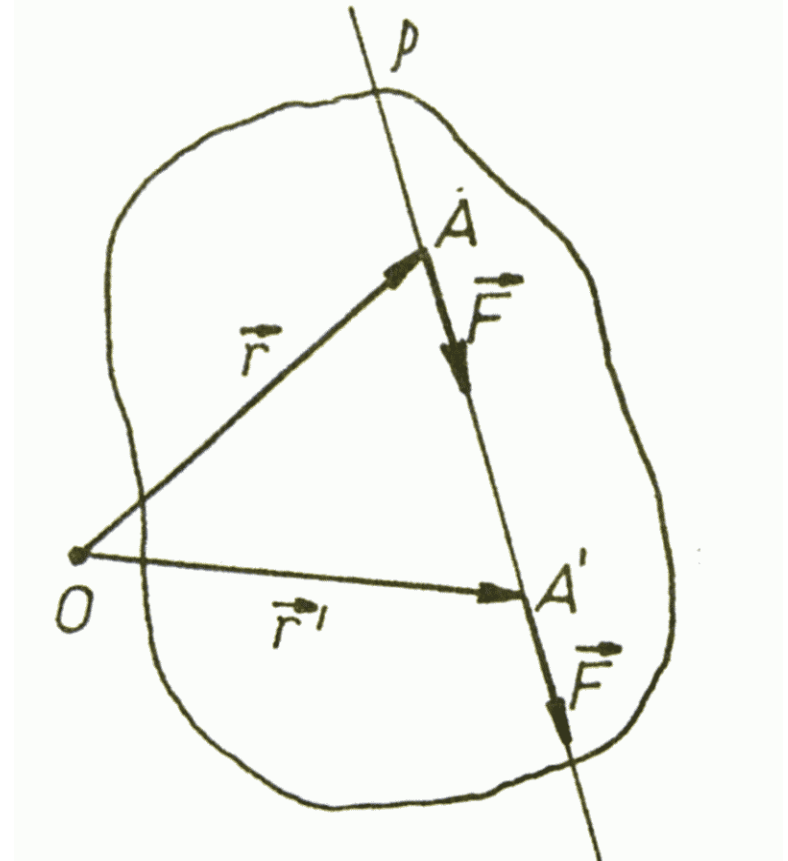
Úpravy soustavy sil při zachování  $\vec{F}^E$  a  $\vec{M}^E$

- zjednodušení nebo zpřehlednění problému
- pro technické aplikace

# Přenesení působiště síly podél přímky

přenesení působiště síly podél „vektorové přímky“

- zachová působení síly i moment k lib. bodu (přímka se nezmění a tedy ani její vzdálenost od libovolného bodu)



# Přesun referenčního bodu momentu sil

přesun referenčního bodu pro výpočet momentu sil  $O \rightarrow O'$

- moment sil vzhledem k bodu  $O$ :

$$\vec{M}^E = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E$$

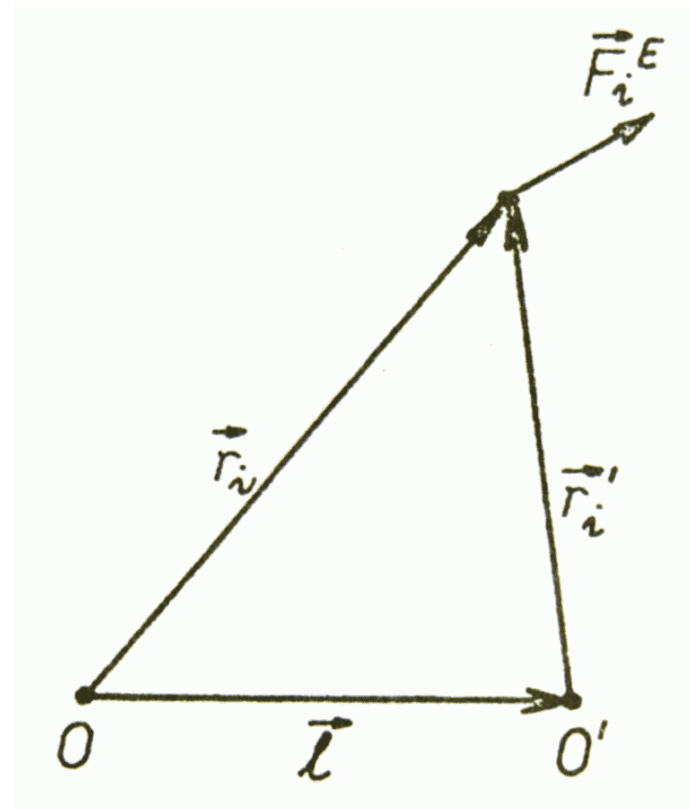
$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{l}$$

- moment sil vzhledem k bodu  $O'$ :

$$\begin{aligned} \vec{M}'^E &= \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^E = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{l}) \times \vec{F}_i^E = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E}_{\vec{M}^E} - \vec{l} \times \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^E}_{\vec{F}^E} = \vec{M}^E - \vec{l} \times \vec{F}^E \end{aligned}$$

- důsledky:

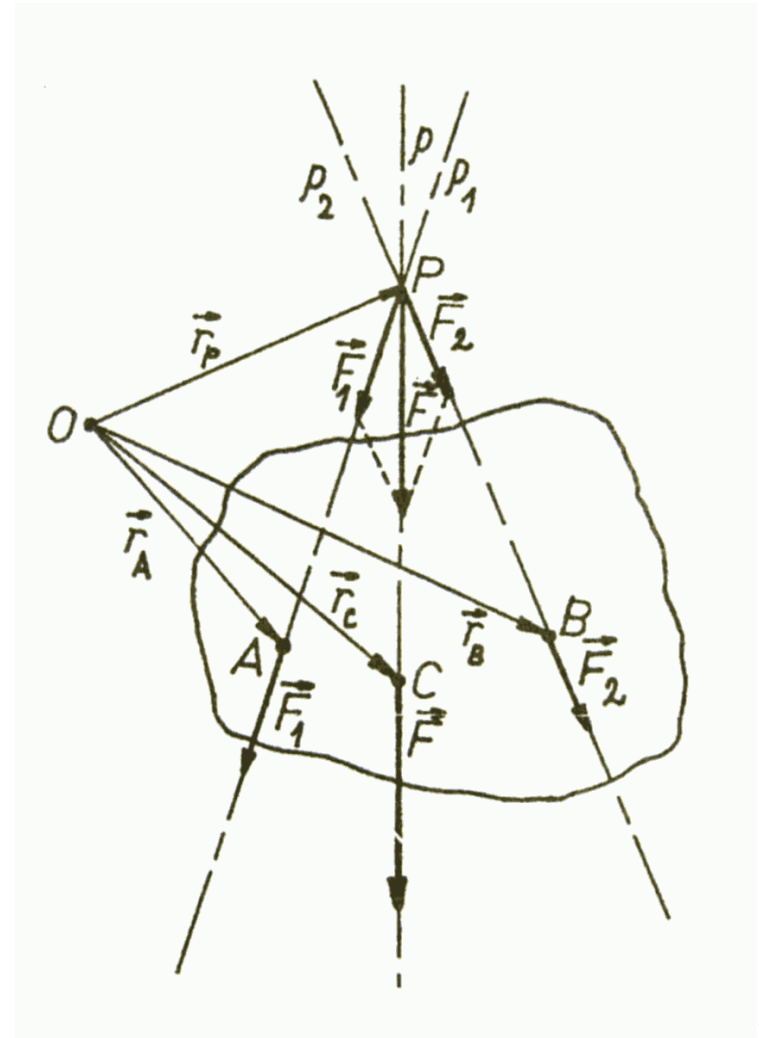
- $\vec{F}^E = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}'^E = \vec{M}^E$
- $\vec{l} \parallel \vec{F}^E \quad \Rightarrow \quad \vec{M}'^E = \vec{M}^E$



# Skládání různoběžných sil

- přenos do průsečíku  $P$  „vektorových přímk“  $p_1$  a  $p_2$
- složení  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
- přenos po „vektorové přímce“  $p$  do libovolného vhodného bodu  $C$
- zachovává celkový moment sil:

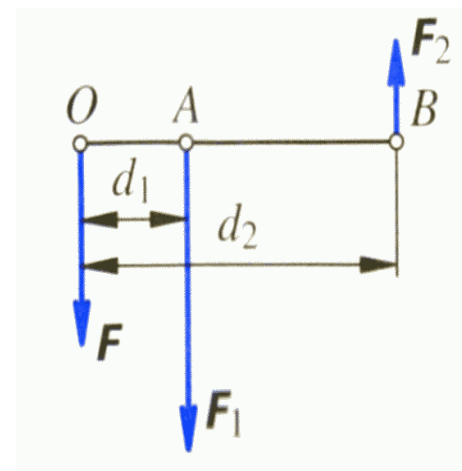
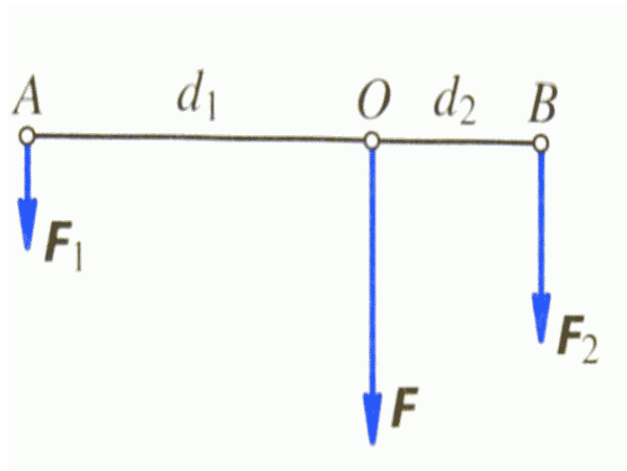
$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{r}_A \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2}_{\vec{r}_P \times \vec{F}_1 + \vec{r}_P \times \vec{F}_2} &= \vec{r}_P \times \vec{F}_1 + \vec{r}_P \times \vec{F}_2 = \\ &= \vec{r}_P \times (\underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{\vec{F}}) = \vec{r}_C \times \vec{F} \end{aligned}$$



# Skládání rovnoběžných sil

- velikost výslednice je součet/rozdíl velikostí
- působíště výslednice nutno hledat z rovnosti momentů
- nejjednodušší úvaha: výslednice má vzhledem k svému působíšti nulový moment  
→ momenty složek se musí vzhledem k tomuto bodu kompenzovat  $d_1 F_1 = d_2 F_2$  →

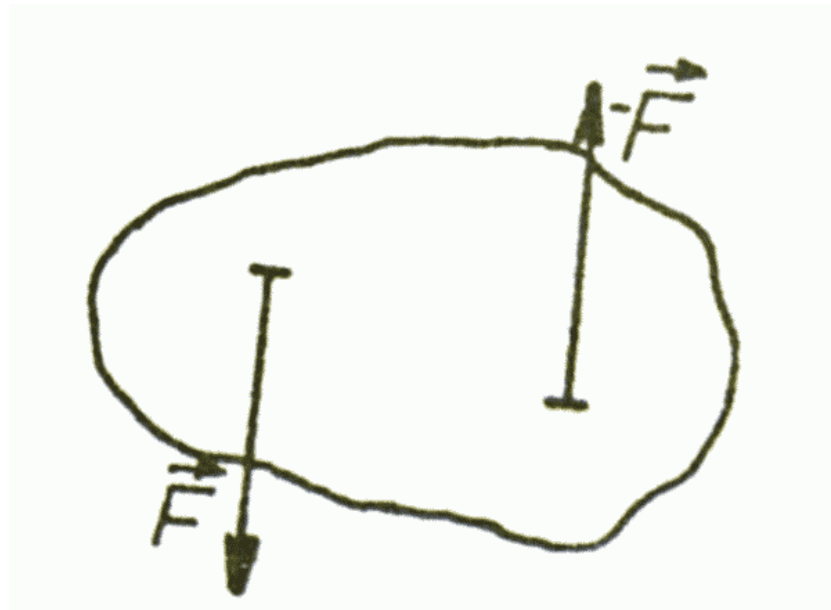
ramena budou v opačném poměru velikostí složek  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$





# Dvojice sil – stejné antiparalelní síly

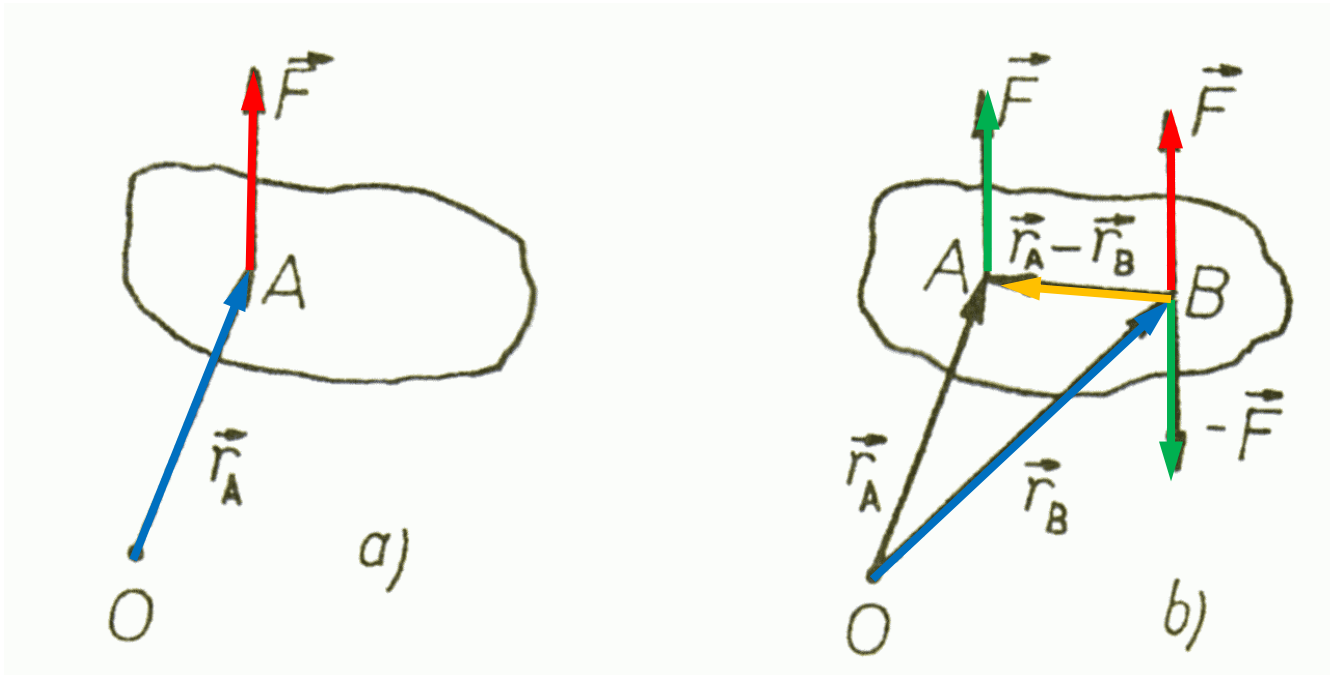
- výslednice nulová  $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$
- výsledný moment  $\vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = \underbrace{(\vec{r}_A - \vec{r}_B)}_{\vec{d}} \times \vec{F} = \vec{d} \times \vec{F} \neq 0$
- moment dvojice  $\vec{M}^D = \vec{d} \times \vec{F} = l |\vec{F}|$ , kde  $l$  je vzdálenost vektorů
- poloha bodu, vůči němuž byly momenty počítány, nemá vliv na výsledek



# Přenesení síly do jiného bodu

- při přenosu síly  $\vec{F}$  z bodu  $A$  do bodu  $B$  se její dynamický účinek na těleso nezmění, doplníme-li sílu  $\vec{F}$  v bodu  $B$  silovou dvojicí s momentem

$$\vec{M}^D = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}. \text{ Platí totiž } \underbrace{\vec{r}_A \times \vec{F}}_{\vec{M}_A} = \underbrace{\vec{r}_B \times \vec{F}}_{\vec{M}_B} + \underbrace{(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}}_{\vec{M}^D}.$$



# Skládání mimoběžných sil

---

- nalézt vzdálenost mimoběžek
- posunout jednu ze sil po této úsečce (kolmá k síle)
- doplnit moment dvojice (ramenem bude vzdálenost mimoběžek)
- výsledkem jsou síly různoběžné, které se složí výše popsaným způsobem

# Přenesení sil do hmotného středu

---

přenesení všech vnějších sil působících na těleso do hmotného středu

- výslednice vnějších sil 
$$\vec{F}^E = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^E$$
- celkový moment po přenesení 
$$\vec{M}^E = \vec{M}^D + \vec{r}_S \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^E$$

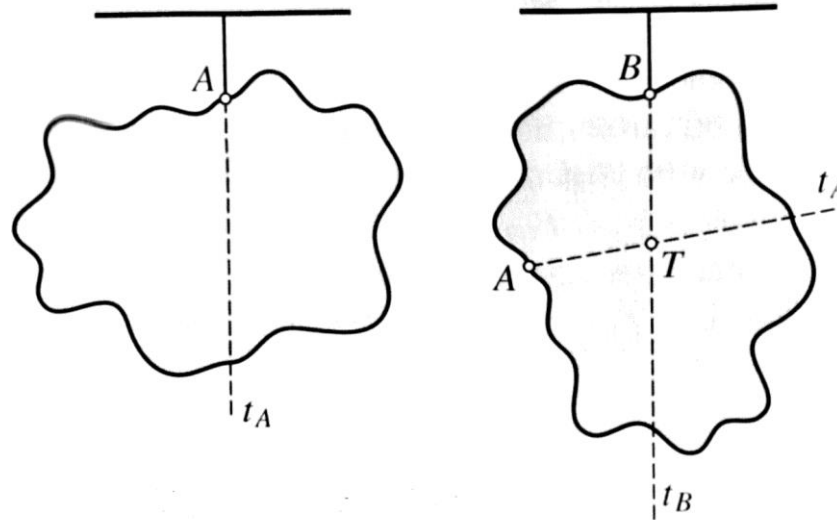
(vzhledem k počátku souřadnic)
- moment  $\vec{M}^D$  je *výsledný moment silové dvojice* (= součet momentů silových dvojic přidaných při přenášení sil do hmotného středu)

# Hmotný střed v homogenním tíhovém poli

- těleso v homogenním tíhovém poli
- popsaným postupem přeneseme síly působící na jednotlivé h.b. tělesa do hmotného středu
- výslednice vnějších sil po přenosu  $\vec{G} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{g} = M \vec{g}$
- celkový moment po přenesení  $\vec{M}^G = \vec{M}^D + \vec{r}_S \times M \vec{g}$   
(vzhledem k počátku souřadnic)
- celkový moment před přenesením  $\vec{M}^G = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N \vec{r}_i m_i \right)}_{\vec{r}_S M} \times \vec{g} = \vec{r}_S \times M \vec{g}$
- porovnáním vidíme, že výsledný moment silové dvojice tíhových sil je nulový  
 $\vec{M}^D = 0$

Závěr: Soustavu sil, které působí na tuhé těleso v homogenním tíhovém poli, lze nahradit jedinou silou – tíhovou silou – umístěnou v hmotném středu tělesa. 21

# Hmotný střed versus těžiště



- působíště tíhové síly v homogenním tíhovém poli – průsečík těžnic
- v homogenním tíhovém poli těžiště splývá s hmotným středem
- v nehomogenním poli těžiště (na rozdíl od hmotného středu) neexistuje, protože těžnice se neprotínají v jediném bodě!

# Rovnováha tuhého tělesa

---

## Musí být splněny současně dvě podmínky rovnováhy

- výslednice vnějších sil  $\vec{F}^E = 0$   
(v důsledku je celkový moment roven výslednému momentu silové dvojice, a ten je nezávislý na vztažném bodu)
- celkový moment  $\vec{M}^E = 0$  (platí-li pro některý bod, platí pro každý bod)

## Jak se chová těleso v rovnováze?

- těleso zůstává v předchozím stavu
- hmotný střed v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu
- otáčení kolem hm. středu je druhou podmínkou jen poněkud omezeno

## Těleso podrobené vazbám

- výhodné využít energetických úvah
- rovnovážná poloha – minimum potenciální energie