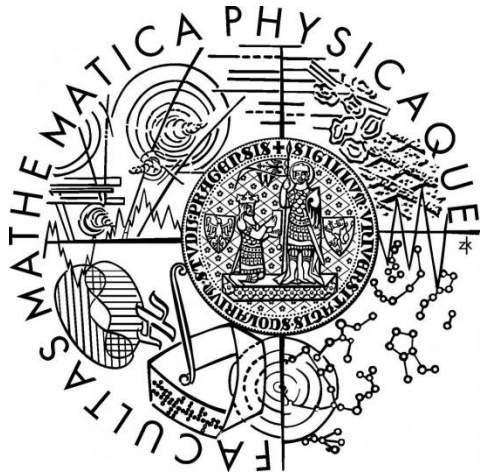


I. MECHANIKA

3. Energie a silové pole I



Obsah

- Impuls síly.
- Zákon zachování hybnosti.
- Práce. Výkon.
- Kinetická energie.
- Pole konzervativních sil.
- Práce po uzavřené křivce.
- Potenciální energie, rovnováha (stabilní, vratká, indiferentní)
- Zákon zachování mechanické energie.
- Intenzita pole, potenciál, gradient. Ekvipotenciální plochy, siločáry.
- Nekonzervativní síly, disipace energie.
- Newtonův gravitační zákon.
- Intenzita a potenciál gravitačního pole. Zemské gravitační pole.
- Gravitační a tíhové zrychlení
- Energie při pohybu v centrálním poli.
- Moment sil v centrálním poli. Keplerovy zákony.

Zákony zachování

Izolovaná soustava těles – není vystavena silovému působení z vnějšku

Volný hmotný bod - speciální případ izolované soustavy těles

Definice inerciální vztažné soustavy

- nezbytná je „hladkost“ prostoru a času
- tyto atributy prostoru a času mají za následek zachování některých charakteristik pohybu (zákony zachování) v rámci izolovaných soustav těles

Které zákony zachování to jsou?

- absolutní prostor
 - homogenní (stejnorodý) → **ZZ hybnosti**
 - izotropní (stejný ve všech směrech) → **ZZ momentu hybnosti**
- absolutní čas
 - homogenní → **ZZ energie**

Impuls síly (pro konstantní sílu)

Sledujme časový účinek síly: 2. NZ $\rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} \rightarrow \vec{F} dt = d\vec{p}$

Co to znamená?

Předpokládejme působení konstantní síly \vec{F} po dobu Δt .

Na počátku $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ a na konci $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$.

Konstantní síla znamená rovnoměrně zrychlený pohyb $\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$.

Z 2.NZ musí platit $\vec{F} = m \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$, což lze přepsat do tvaru $\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

neboli $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$.

Pro posloupnost časových intervalů $\rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^N \Delta\vec{p}_i = \vec{p}_{\text{fin}} - \vec{p}_{\text{ini}}$

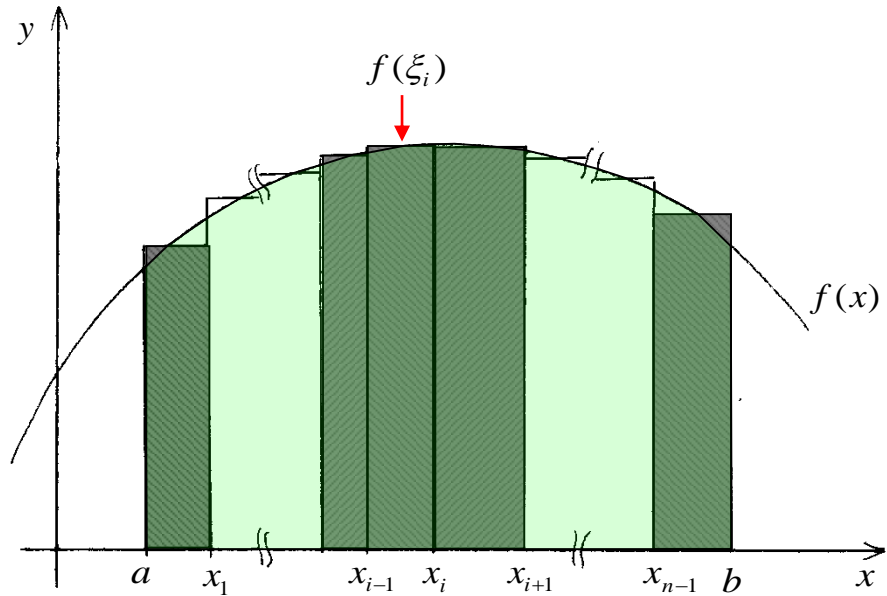
Určitý integrál

Mějme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Rozdělme interval na n úseků mezi body

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Každý úsek reprezentuje jedna z funkčních hodnot $f(\xi_i)$, kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.



Utvořme tzv. integrální součet $S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}$.

Limitu součtu S pro $n \rightarrow \infty$ nazveme **určitým (Riemannovým) integrálem**

funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$. Označíme $\int_a^b f(x) dx$.

Z definice vidíme, že určitý integrál představuje plochu „pod“ integrovanou křivkou v intervalu $\langle a, b \rangle$.

Určitý integrál

Definice obsahuje popis výpočtu integrálu i pro funkce se složitým průběhem (nespojité). Je základem algoritmů pro strojový výpočet.

Postup lze aplikovat na experimentální závislosti.

Jak se počítá určitý integrál běžné funkce?

Pomůže Newtonova-Leibnizova formule:

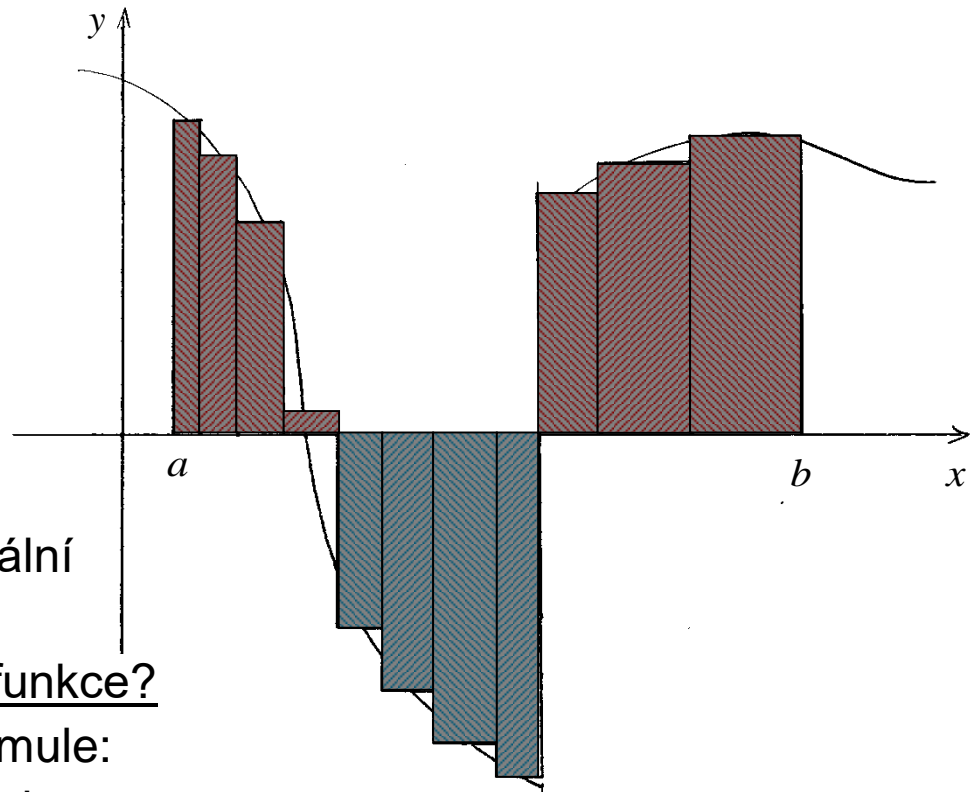
Mám funkci $f(x)$ spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$

a $F(x)$ je její primitivní funkce, pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$
 Toto je tzv. **Newtonův** integrál, který pro

spojité funkce dává stejné výsledky jako Riemannův.

Příklad:
$$\int_a^b dx = [x]_a^b = b - a$$



Impuls síly

Uvažujme časově proměnnou sílu $\vec{F} = \vec{F}(t)$ působící na hmotný bod v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Analogicky (k součtu přes konečné časové intervaly) platí

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \int_{\vec{p}(t_1)}^{\vec{p}(t_2)} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1.$$

Integrál $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$ se nazývá **impuls síly** \vec{F} .

Platí $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$, tj. změna hybnosti h.b. se rovná impulsu síly působící na h.b.

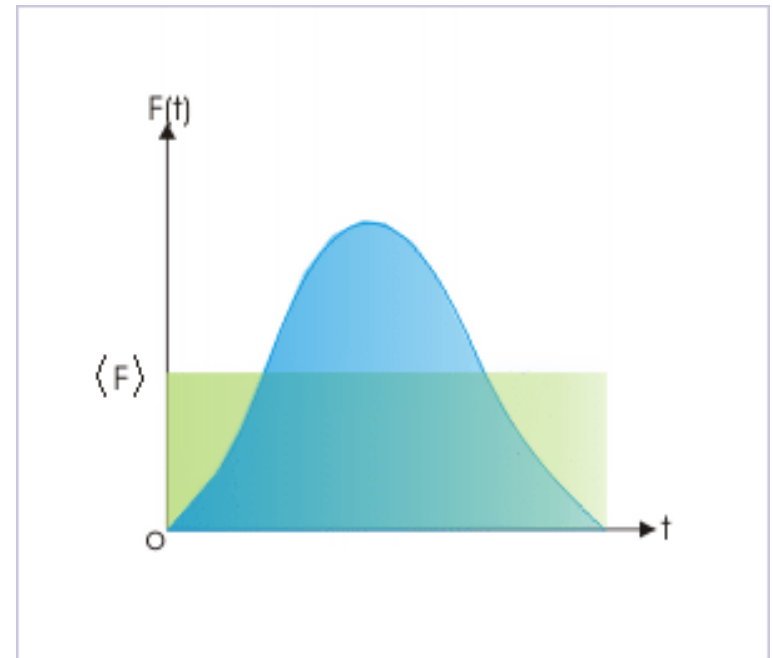
Důležité pro stanovení účinku síly, když není přesně znám její časový průběh.

Střední (průměrná) síla

Střední síla $\langle \vec{F} \rangle$ působící v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ zavedena tak, aby jí vyvolaný impuls byl roven impulsu skutečně působící síly

$$\langle \vec{F} \rangle (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

$$\rightarrow \langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$



Tento způsob se používá pro výpočet (časové) střední hodnoty $\langle \vec{x} \rangle$

libovolné veličiny \vec{x} :

$$\langle \vec{x} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{x}(t) dt$$

Impuls momentu síly

Uvažujme časově proměnný moment síly $\vec{M} = \vec{M}(t)$ vzhledem k bodu O působící na hmotný bod v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Analogicky platí

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times m\vec{v} = 0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right\} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{b}}{dt} dt = \int_{\vec{b}(t_1)}^{\vec{b}(t_2)} d\vec{b} = \vec{b}_2 - \vec{b}_1 \end{aligned}$$

Integrál $\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t) dt$ se nazývá **impuls momentu síly** \vec{M} .

Platí $\vec{L} = \vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \Delta\vec{b}$, tj. změna momentu hybnosti h.b. se rovná impulsu momentu síly působící na h.b. vzhledem ke stejnému bodu O.

Zákon zachování hybnosti

Uvažujme dva hmotné body, které vzájemně interagují.

3.NZ $\rightarrow \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ (těleso A působí na B silou \vec{F}_{AB} ; těleso B působí na A silou \vec{F}_{BA})

Doba interakce je dána společným časovým intervalem $\langle t_1, t_2 \rangle$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{BA}(t) dt = \vec{p}_A(t_2) - \vec{p}_A(t_1) = \Delta \vec{p}_A$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{AB}(t) dt = \vec{p}_B(t_2) - \vec{p}_B(t_1) = \Delta \vec{p}_B$$

$$\rightarrow \Delta \vec{p}_A = -\Delta \vec{p}_B$$

$$\rightarrow \Delta \vec{p}_A + \Delta \vec{p}_B = 0$$

$$\rightarrow \vec{p}_B(t_1) + \vec{p}_A(t_1) = \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2)$$

zákon zachování hybnosti v uzavřené soustavě

Zákon zachování momentu hybnosti

Uvažujme dva hmotné body, které vzájemně interagují.

3.NZ $\rightarrow \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ (těleso A působí na B silou \vec{F}_{AB} ; těleso B působí na A silou \vec{F}_{BA})

Doba interakce je dána společným časovým intervalem $\langle t_1, t_2 \rangle$.

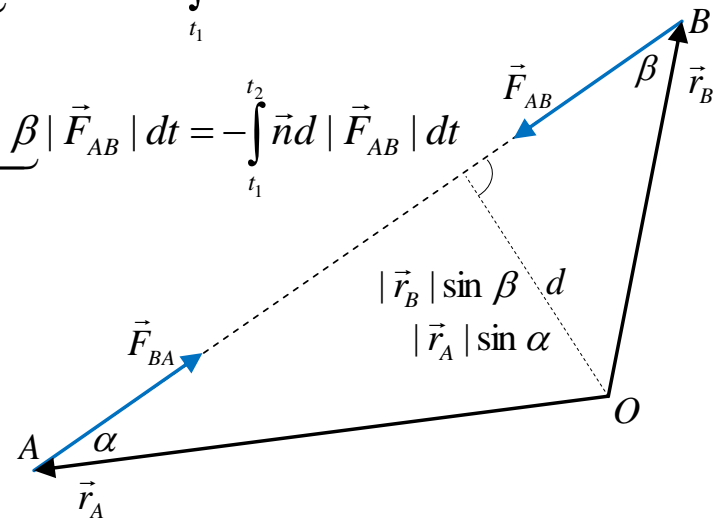
Analogicky z porovnání momentů síly vůči libovolnému bodu

$$\Delta \vec{b}_A = \vec{b}_A(t_2) - \vec{b}_A(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{BA}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_A \times \vec{F}_{BA} dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{n} |\vec{r}_A| \sin \alpha}_{d} |\vec{F}_{BA}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{n} d |\vec{F}_{BA}| dt$$

$$\Delta \vec{b}_B = \vec{b}_B(t_2) - \vec{b}_B(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{AB}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_B \times \vec{F}_{AB} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{n} |\vec{r}_B| \sin \beta}_{d} |\vec{F}_{AB}| dt = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{n} d |\vec{F}_{AB}| dt$$

$$\rightarrow \Delta \vec{b}_A + \Delta \vec{b}_B = 0$$

zákon zachování momentu hybnosti
v uzavřené soustavě



Zákony zachování ZZH, ZZMH

Zákony je možno zobecnit na libovolný počet hmotných bodů v izolované soustavě.

Filozofická poznámka pro zvědavé:

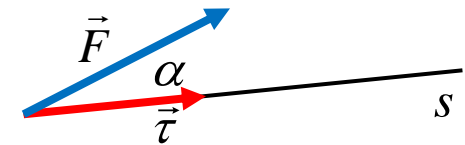
Experimentálně bylo prokázáno, že uvedené dva ZZ nejsou ve skutečnosti důsledkem 3. NZ, nýbrž právě naopak:

- uvedené ZZ platí i mimo rámec klasické mechaniky
- pokud platí předpoklady pro použití klasické mechaniky (tj. pokud šíření interakce mezi tělesy můžeme považovat za nekonečně rychlé), je důsledkem těchto ZZ také 3.NZ

Práce (pro konstantní sílu)

sledujme dráhový účinek síly: $\vec{F} \cdot \vec{s}$

Co to znamená?



Předpokládáme působení konstantní síly \vec{F} po přímé dráze délky s , jejíž směr je určen jednotkovým vektorem $\vec{\tau}$.

Vektor \vec{F} svírá s vektorem $\vec{\tau}$ úhel α .

Součin $|\vec{F}| s \cos \alpha$ se označuje jako **práce** $W = |\vec{F}| s \cos \alpha$.

Označíme-li vektor $s\vec{\tau}$ jako vektor posunutí $\vec{s} = s\vec{\tau}$, lze zapsat $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Pro posloupnost úseků dráhy $\rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i = \sum_{i=1}^N \Delta W_i = W$

Práce – obecná formulace

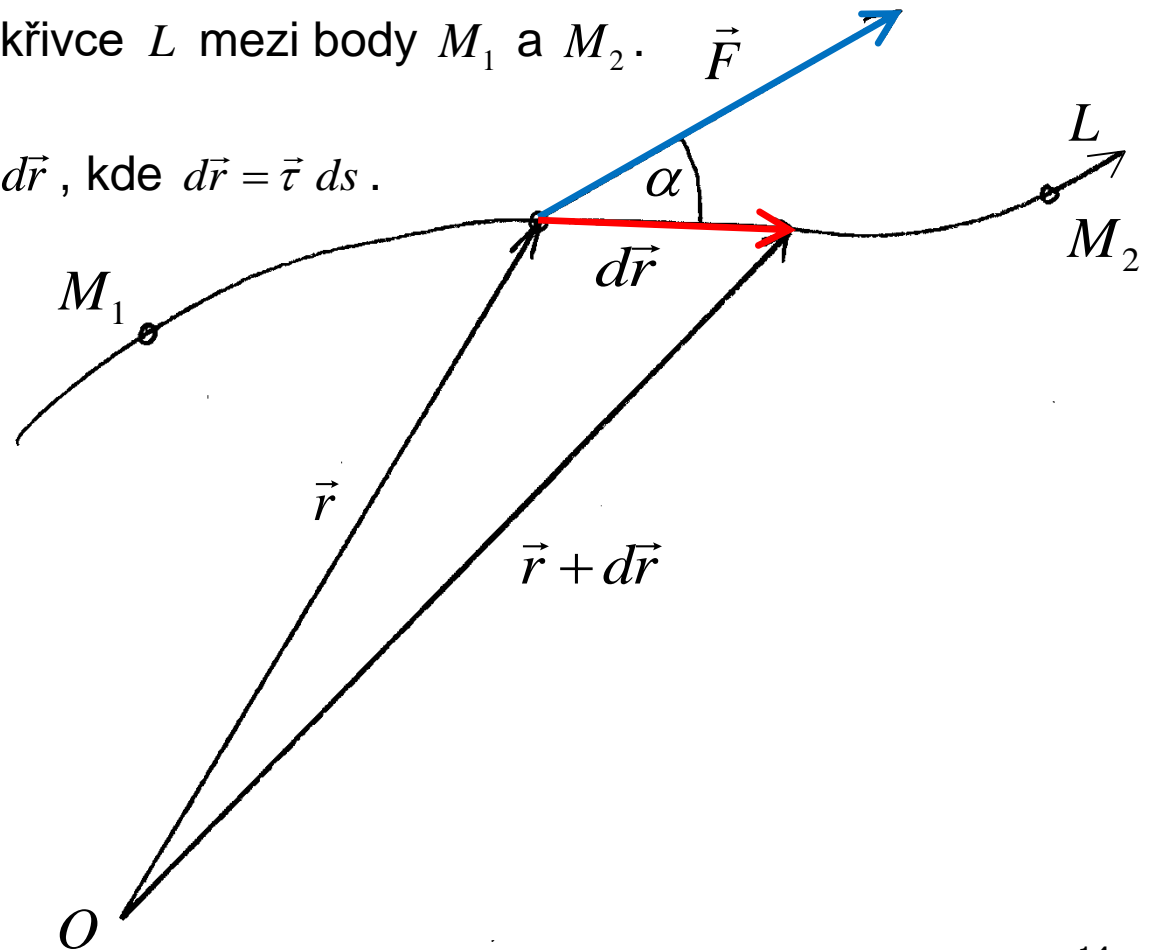
Uvažujme časově proměnnou sílu $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ působící na hmotný bod po orientované křivce L mezi body M_1 a M_2 .

Elementární práce $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $d\vec{r} = \vec{\tau} ds$.

Křivkový integrál

$$W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

vyjadřuje vykonanou **práci**.



Práce – vlastnosti

Elementární práci lze zároveň zapsat

$$dW = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cos \alpha = |\vec{F}| ds \cos \alpha = \underbrace{(|\vec{F}| \cos \alpha)}_{|\vec{F}_t|} ds$$

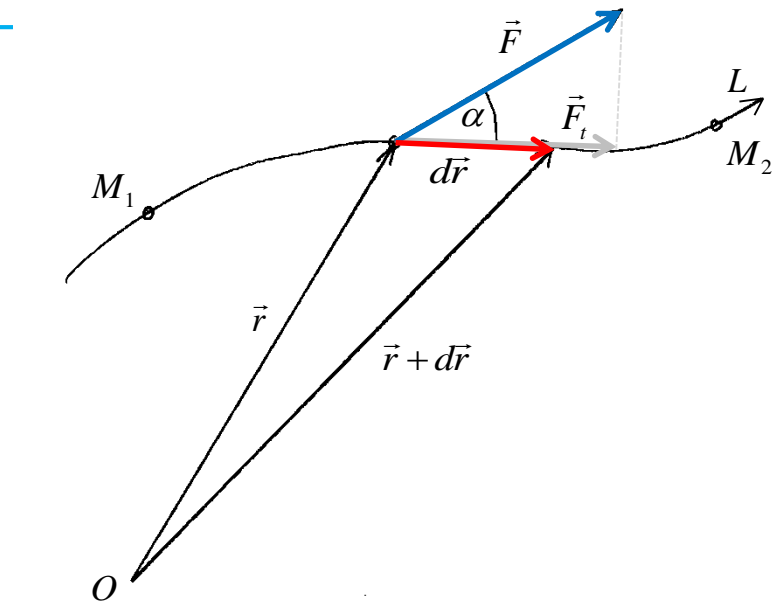
Práci koná pouze tečná složka $|\vec{F}_t| = |\vec{F}| \cos \alpha$

Znaménková konvence

- $W > 0$... síla urychluje pohyb ($\cos \alpha > 0$)
- $W < 0$... síla zpomaluje pohyb ($\cos \alpha < 0$)
- $W = 0$... tečná složka síly nulová, tj. působící síla kolmá k vektoru posunutí ($\cos \alpha = 0$)

Vlastnosti integrálu W

- závisí na počátečním a koncovém bodu a tvaru dráhy
- nezávisí na rychlosti nebo době trvání
- znaménko se mění se směrem procházení



$$W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{L(M_2)}^{L(M_1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{21}$$

Okamžitý výkon

Časovou derivaci práce W nazýváme **okamžitý výkon**.

Označujeme $P = \frac{dW}{dt}$.

$$\text{Platí } W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2} dW \frac{dt}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt .$$

Znaménko výkonu je stejné jako znaménko vykonávané práce.

Počítání s křivkovým integrálem

Rovnice křivky L parametrizována $\vec{r} = \vec{r}(q)$.

Hodnoty parametru q_1 a q_2 odpovídají bodům $L(M_1)$ a $L(M_2)$.

Proveďme v integrálu substituci $\vec{r} \rightarrow \vec{r}(q)$. Pak $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}(q)) = \vec{F}(q)$.

Diferenciál $d\vec{r}$ vyjádříme pomocí derivace $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dq} dq$ a dostaneme

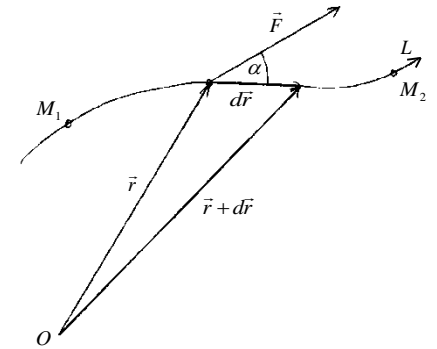
$$W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{q_1}^{q_2} \left(\vec{F}(q) \cdot \frac{d\vec{r}(q)}{dq} \right) dq = \int_{q_1}^{q_2} F_1 \frac{dx_1}{dq} dq + \int_{q_1}^{q_2} F_2 \frac{dx_2}{dq} dq + \int_{q_1}^{q_2} F_3 \frac{dx_3}{dq} dq,$$

což je součet běžných Riemannových integrálů.

Situace bude názornější, pokud je parametrem čas

$$W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)) dt$$

Porovnáním s definicí okamžitého výkonu $W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt$ je zřejmé, že $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$



Odbočka: Točivý moment a výkon motoru

- motory se charakterizují výkonem a točivým (někdy též krouticím) momentem
- točivý moment je z fyzikálního hlediska moment síly

- uvažujme kolo poloměru r připojené na výstupní hřídel motoru
- hřídel se otočí f -krát za sekundu
- na obvodu kola působí síla F po dobu Δt

- moment síly vůči ose otáčení

$$M = Fr$$

- za tuto dobu kolo vykoná $f \Delta t$ otáček

- síla působí po dráze

$$s = 2\pi r f \Delta t$$

- vykonaná práce

$$\Delta W = F 2\pi r f \Delta t = \underbrace{2\pi f}_{\omega} \underbrace{Fr}_{M} \Delta t$$

- výkon motoru

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \omega M$$

Kinetická energie

Výpočet práce vykonané silovým působením po zadané dráze

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v} dt$$

$$dW = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})}_{\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}} dt = \frac{1}{2} m d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2\right)$$

Definujme **kinetickou energii** vztahem $E_k = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$. Pak platí $dW = dE_k$.

Platí tedy

$$W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} dW = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} d\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2\right) = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} dE_k = [E_k]_{M_1}^{M_2} = E_k(M_2) - E_k(M_1) = \frac{1}{2} m \vec{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_1^2 = \Delta E_k$$

Přírůstek kinetické energie je roven práci vykonané vnějšími silami na h.b. při přechodu z výchozího do koncového bodu po konkrétní zadané dráze.

Kinetická energie

- K.E. představuje míru schopnosti těles konat práci
- změna K.E. rovna práci vnějších sil
- závisí na volbě soustavy souřadnic
- znaménková konvence: pokud vnější síly konají kladnou práci, K.E. roste
 - při brzdění působí vnější síla proti pohybu – síla koná zápornou práci (kladnou práci koná těleso a při tom se snižuje jeho K.E.)
 - při urychlování síla pomáhá pohybu – koná kladnou práci a zvyšuje K.E.
- mění-li rychlost jen směr při stejné velikosti, K.E. se zachovává (síla působí kolmo ke směru rychlosti) – příkladem je pohyb po kružnici
- změna K.E. umožňuje zjistit práci sil bez znalosti jejich detailního průběhu

Historická poznámka

Podobně jako Descartes a hlavně Newton pokládal za míru pohybu hybnost, považoval Newtonův současník Leibniz za míru pohybu kinetickou energii (resp. veličinu mv^2 , kterou nazýval *vis viva* neboli „živá síla“).

Silové pole

- vektorové pole
- určuje sílu působící v každém bodě
- gravitační pole, elmg. pole

Časově nezávislé pole

- testovací bod se pohybuje mezi body M_1 a M_2
- hodnota práce W_{12} vykonané silami pole při pohybu h.b. mezi body M_1 a M_2 závisí jen na dráze L
- při průchodu po stejné dráze opačným směrem je práce $W_{21} = -W_{12}$

Konzervativní silové pole

- pole, kde pro libovolnou uzavřenou křivku L platí $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, se nazývá **konzervativní** nebo též **potenciálové**
- superpozicí dílčích konzervativních polí vznikne opět konzervativní pole

Konzervativní silové pole

Ekvivalentní tvrzení: Pole je konzervativní právě tehdy, když práce vykonaná polem při pohybu h.b. z polohy M_1 do M_2 nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body.

Uzavřená dráha L_1+L_3 :

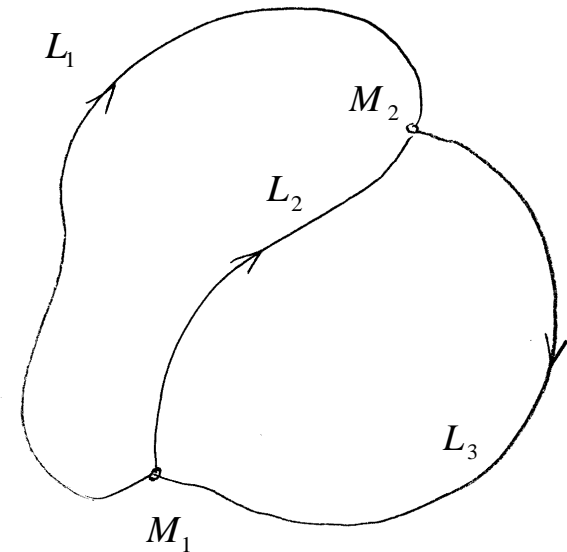
$$\oint_{L_1+L_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{L_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{L_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{L_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Uzavřená dráha L_2+L_3 :

$$\oint_{L_2+L_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{L_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{L_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{L_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Z porovnání plyne nezávislost na dráze:

$$\Rightarrow \int_{L_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Ekvivalentní tvrzení: Pole \vec{F} je konzervativní právě tehdy, když v celé vyšetřované oblasti platí $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ (důsledek Stokesovy věty).

Vektorový diferenciální operátor nabla

Připomeňme:

- nejobvyklejším (diferenciálním) operátorem je derivace $\frac{d}{dx}$
- derivaci funkce více proměnných se říká parciální a namísto d se užívá symbol ∂
- užitíme sčítací konvenci, pokud se ve výrazu vyskytuje stejný index právě dvakrát

Operátor *nabla* definován symbolicky $\nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Je to vektor.

Gradient

Nabla se aplikuje na skalární funkci f takto $\nabla f = \vec{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \vec{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$.

Tento operátor se také nazývá **gradient** $\text{grad } f = \nabla f$.

Po složkách $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$.

Názorný význam:

- Čím příkřejší změna hodnoty funkce v závislosti na určité souřadnici, tím větší hodnota příslušné složky gradientu.
- Směr gradientu určuje směr největšího vzrůstu funkce.

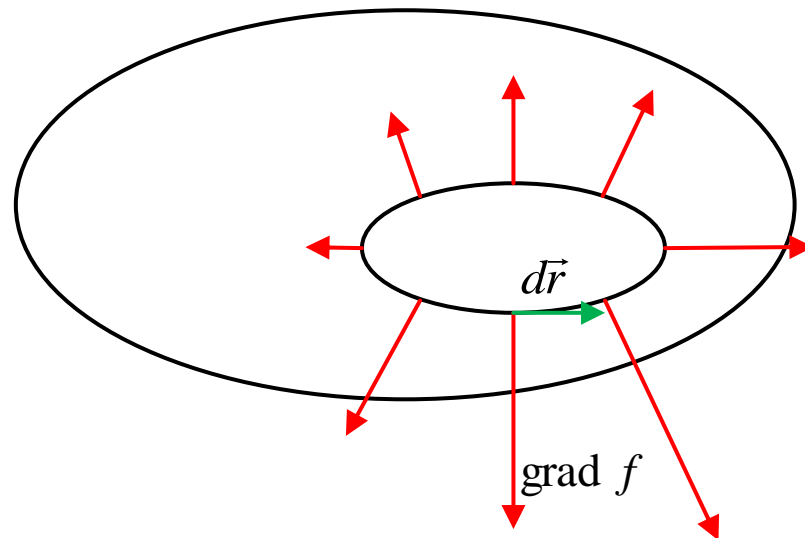
Názorný význam gradientu

- Diferenciál funkce $f(x_1, x_2, x_3)$ lze v okolí zvoleného bodu $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

zapsat ve tvaru $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$ neboli $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, což lze

zapsat vektorově $df = d\vec{r} \cdot \text{grad } f(\vec{r})$

- Plocha konstantní hodnoty („vrstevnice“) funkce f je v okolí bodu \vec{r} dána podmínkou $df = d\vec{r} \cdot \text{grad } f(\vec{r}) = 0$, tedy gradient je kolmý k ploše konstantní hodnoty



Rotace

Operátor *nabla* je možno aplikovat na vektorovou funkci \vec{A} .

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \vec{e}_j A_j = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \vec{e}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)$$

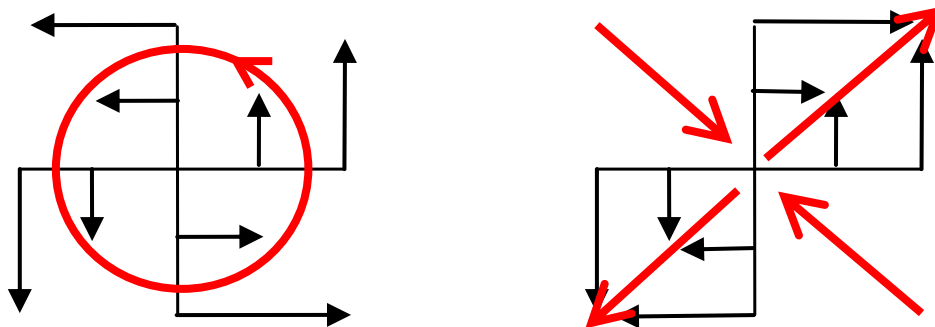
Tento operátor se také nazývá rotace $\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$, případně se značí $\text{curl } \vec{A}$.

Po složkách $\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)$.

Platí $\text{rot grad } f = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \vec{0}$

Názorný význam rotace

Zkoumejme vektor rychlosti proudění tekutiny. Veličina $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ určuje růst y -ové složky rychlosti podél x -ové osy, obdobně $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ určuje růst x -ové složky rychlosti podél y -ové osy. Předpokládejme $v_y = kx$ a $v_x = -ky$ (tekutina rotuje), pak příslušná složka vektoru rotace bude rovna $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2k$. Naopak pokud $v_y = kx$ a $v_x = ky$ („hvězdicový“ pohyb), složka vektoru rotace bude nulová.



Divergence

Jiný způsob aplikace na vektorovou funkci \vec{A}

$$\nabla \cdot \vec{A} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \vec{e}_j A_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}.$$

Tento operátor se také nazývá divergence $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$.

Po složkách $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$.

Názorný význam operátoru divergence:

Vyskytuje se ve výrazech popisujících intenzitu vytékání tekutiny, náboje apod.

(lat. *divergens* = rozbíhající se).

Názorný význam divergence

Zkoumáme vektor rychlosti proudění tekutiny.

Jak pro rotační proudění $v_y = kx$ a $v_x = -ky$

tak pro „hvězdicové“ proudění $v_y = kx$ a $v_x = ky$ vyjde

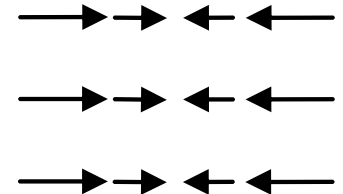
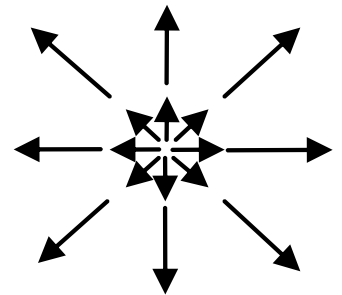
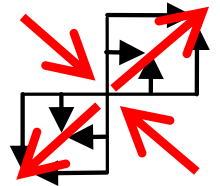
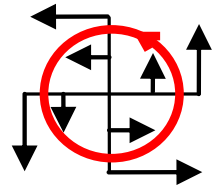
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Naopak „zřídlové“ proudění $v_x = kx$ a $v_y = ky$ vede na

nenulovou divergenci $\frac{\partial v_x}{\partial x} = k \wedge \frac{\partial v_y}{\partial y} = k \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 2k$.

Podobně proudění $v_x = -kx$ a $v_y = 0$ vede na nenulovou

divergenci $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -k \wedge \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = -k$.



Potenciální energie

V konzervativním silovém poli závisí práce jen na

- poloze počátečního bodu $M_1 = \vec{r}_1$ a
- poloze koncového bodu $M_2 = \vec{r}_2$

⇒ možno zavést veličinu $E_p(\vec{r})$ závislou na poloze –
potenciální (polohovou) energii – vyhovující vztahu

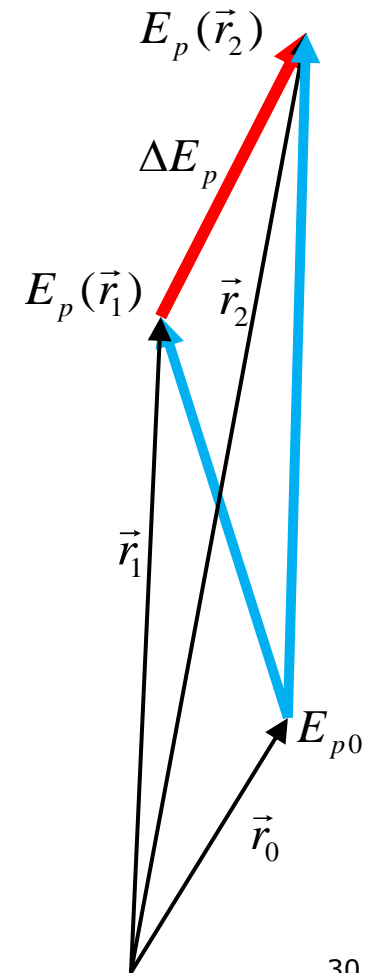
$$-W_{12} = E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1) = \Delta E_p$$

Rozdíl potenciální energie dvou bodů v konzervativním poli je s opačným znaménkem roven práci vykonané polem na h.b.

V konzervativním poli lze potenciální energii $E_p(\vec{r})$ zavést

$$\text{jednoznačně vztahem } E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + E_{p0}$$

(konstanta E_{p0} je hodnota potenciální energie v bodě \vec{r}_0)



Zákon zachování mechanické energie

Práce vykonaná konzervativním silovým polem na hmotném bodu při přechodu mezi dvěma polohami je rovna

- změně kinetické energie $W_{12} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$
- změně potenciální energie se záporným znaménkem

$$W_{12} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

Porovnáním získáme **zákon zachování mechanické energie (ZZME)**

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

případně

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = \text{konst.}$$

Pohybuje-li se hmotný bod silami konzervativního pole, součet jeho kinetické a potenciální energie (celková mechanická energie) je konstantní, tj. $E_k + E_p = \text{konst.}$

Nekonzervativní pole

Pro pole nekonzervativních sil platí obecně $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$.

To znamená, že na začátku a na konci uzavřené dráhy se hodnota K.E. liší.

Neplatí ZZME.

Pro **pole disipativních sil** platí $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$, to znamená, že v celkové bilanci síla působí proti pohybu.

Příkladem jsou třecí síly.

Dochází k disipaci (rozptylu) energie – k přeměně mechanické energie na jinou formu energie, nejčastěji teplo.

Změny energie v nekonzervativním poli

Předpokládejme, že vedle konzervativních sil \vec{F} působí také síly nekonzervativní \vec{F}^* a síly vnější \vec{F}_{ext} .

Práce konzervativních sil $W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Práce nekonzervativních sil $W_{12}^* = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^* \cdot d\vec{r}$.

Práce vnějších sil $W_{12}^{\text{ext}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r}$.

Celková práce sil bude rovna změně K.E. $W_{12} + W_{12}^* + W_{12}^{\text{ext}} = \Delta E_k$

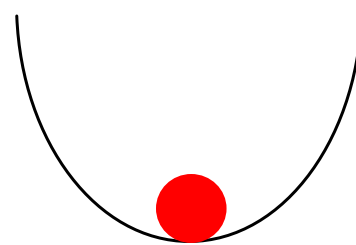
Práce konzervativních sil se rovná změně P.E. $W_{12} = -\Delta E_p$

Celková změna mechanické energie je rovna součtu práce vnějších sil a práce vykonané nekonzervativními silami $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W_{12}^* + W_{12}^{\text{ext}}$.

Potenciální energie – rovnováha

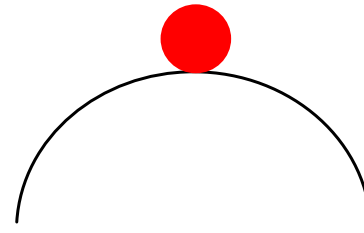
rovnováha stabilní

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0$$



rovnováha vratká

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2 E_p}{dx^2} < 0$$



rovnováha indiferentní

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2 E_p}{dx^2} = 0$$



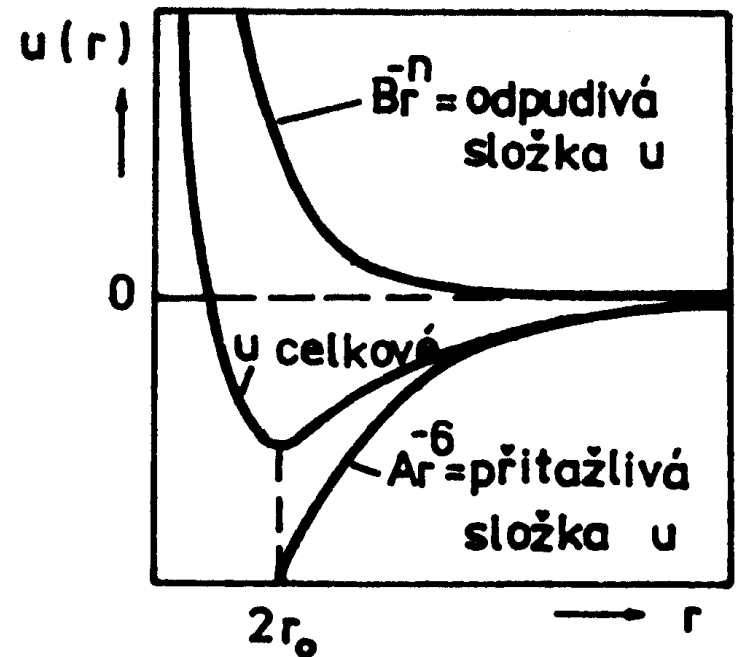
Silové působení na atomární úrovni

potenciální energie silového působení mezi částicemi

- síly většinou konzervativní
- různé mocniny vzájemné vzdálenosti
- působení jednotlivých sil se skládá (princip superpozice)
- díky linearitě integrálu resp. derivace se sčítají potenciální energie příslušející jednotlivým konzervativním silovým polím

interakce většího počtu objektů

- potenciální energie celé soustavy (konfigurační energie) = práce všech interakčních sil $E_p = \sum E_p^{ij}$



Gradient potenciální energie

Hledáme ke vztahu $\vec{F}(\vec{r}) \rightarrow E_p(\vec{r})$ vyjádřenému rovnicí $E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + E_{p0}$

vztah inverzní $E_p(\vec{r}) \rightarrow \vec{F}(\vec{r})$.

$$\text{PE po složkách } E_p = -\int_{x_{10}}^{x_1} F_1 dx'_1 - \int_{x_{20}}^{x_2} F_2 dx'_2 - \int_{x_{30}}^{x_3} F_3 dx'_3 + E_{p0} = -\int_{x_{i0}}^{x_i} F_i dx'_i + E_{p0}.$$

Diferenciál libovolné funkce $E_p(x_1, x_2, x_3)$ můžeme (při splnění předpokladu spojitosti a existence jednotlivých parciálních derivací) zapsat ve tvaru

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial E_p}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial E_p}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial E_p}{\partial x_i} dx_i. \text{ Pro integrál dostaneme vztah}$$

$$E_p = \int_{[x_{10}, x_{20}, x_{30}]}^{[x_1, x_2, x_3]} dE_p = \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial E_p}{\partial x'_1} dx'_1 + \int_{x_{20}}^{x_2} \frac{\partial E_p}{\partial x'_2} dx'_2 + \int_{x_{30}}^{x_3} \frac{\partial E_p}{\partial x'_3} dx'_3 + E_{p0} = \int_{x_{i0}}^{x_i} \frac{\partial E_p}{\partial x'_i} dx'_i + E_{p0}.$$

Porovnáním získáme hledané $F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i}$ neboli $\vec{F} = -\text{grad } E_p$ resp. $\vec{F} = -\nabla E_p$

povšimněte si souvislostí: $\text{rot grad} = 0$; $\vec{F} = -\text{grad } E_p$; pole je konzervativní $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = 0$

Intenzita pole. Potenciál.

Intenzita pole – síla působící na h.b.jednotkové hmotnosti $\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m}$

Potenciál – potenciální energie h.b. o jednotkové hmotnosti $\varphi = \frac{E_p}{m}$

- Platí: $\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-\nabla E_p}{m} = -\nabla \varphi$ tedy $\vec{I} = -\nabla \varphi$ neboli $I_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$
- Popis pole pomocí potenciálu je výhodný, protože jde o skalární veličinu.
- V oblasti, kde je konstantní potenciál, je intenzita pole a tedy i síla nulová.

Ekvipotenciální plochy. Siločáry.

- Gradient určuje směr největšího růstu potenciální energie, směřuje proti vektoru silového pole ($\vec{F} = -\text{grad } E_p$).
- Ekvipotenciální plochy jsou kolmé k vektoru gradientu, protože ekvipotenciální plocha je v okolí bodu \vec{r} dána podmínkou $dE_p = d\vec{r} \cdot \text{grad } E_p(\vec{r}) = 0$.
- Siločáry mají směr normály k ekvipotenciálním plochám, jejich směr v daném bodě je shodný se směrem gradientu $\vec{v} = \frac{\text{grad } E_p(\vec{r})}{|\text{grad } E_p(\vec{r})|}$.
- Hustotou siločar se často znázorňuje velikost intenzity pole.

