I. MECHANIKA

1. Kinematika hmotného bodu

Obsah

- prostor, čas, hmotný bod
- vztažná soustava, trajektorie, dráha, průměrná a okamžitá rychlost, zrychlení
- pojmy derivace a integrálu
- složky vektoru, polohový vektor, skládání rychlosti
- tečná a normálová složka zrychlení, dostředivé zrychlení
- klasifikace pohybu (přímočarý x křivočarý, rovnoměrný x nerovnoměrný)
- rovnoměrný kruhový pohyb
- harmonický pohyb po přímce

Vývoj základních pojmů kinematiky

kiné = pohyb

hmotné objekty existují v prostoru a času, „zabírají“ určitou část prostoru, polohy se s časem mění

prostor

- antická představa (Aristoteles) – 2 oblasti s různými zákonitostmi (prostor okolo Země x oblast pohybu nebeských těles)
- empirická pozorování a experimenty $\rightarrow$ teorie gravitace + Keplerovy zákony $\rightarrow$ na Zemi i ve vesmíru stejné zákonitosti pohybu $\rightarrow$ *absolutní* prostor nezávislý na hmotných objektech a jejich pohybech (Newton)
- *axiom (Newton) : „Absolutní prostor je vzhledem ke své podstatě a bez ohledu na vnější objekty stále týž a nepohyblivý.“*
- **prostor – trojrozměrné (3 nezávislé údaje) kontinuum (spojitá změna vzdálenosti)**

čas

- odvozen od doby trvání objektivně existujících procesů, později pohyb Slunce po obloze, pak pohyb hvězd, měření času aktuálně odvozeno od kmitů krystalu
- *axiom (Newton) : „Absolutní, skutečný a matematický čas plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně a bez ohledu na vnější objekty.“*
- **čas – spojitý parametr společný všem objektům nezávisle na jejich pohybu (rychlosti)**

vliv objektů na prostor a čas

- tělesa (pohybem i hmotností) působí na geometrii prostoročasu (Einstein - teorie relativity)

Základní matematické abstrakce

prostor a čas nezávislé na hmotných objektech

- prostor je trojrozměrné kontinuum (Eukleidovský prostor)
- čas je jednorozměrné kontinuum

hmotný bod (vhodnější by bylo „bodová hmotnost“ analogicky k „bodovému náboji“)

- bezrozměrný (nekonečně malý)
- nemůže se ani deformovat ani rotovat
- abstraktní
- přesto lze takto s dostatečnou přesností popisovat řadu objektů (subatomární částice, resp. atomy ve srovnání s velikostí těles, planety ve srovnání s velikostí sluneční soustavy)
- reálná tělesa lze popisovat jako soustavy hmotných bodů (později)

vztažná soustava (vztažný systém, soustava souřadná)

- soustava souřadnic, vůči níž se stanovuje poloha hmotného bodu
- určena počátkem a orientací os

Trajektorie
Skalární charakteristiky pohybu

Trajektorie

- geometrická křivka v prostoru, kterou hmotný bod při pohybu opisuje
- dle tvaru trajektorie rozlišujeme pohyb přímočarý a křivočarý (kruhový,...)

Dráha s

- délka trajektorie, kterou hmotný bod proběhne za čas $\Delta t = t_2 - t_1$

Parametrizace polohy

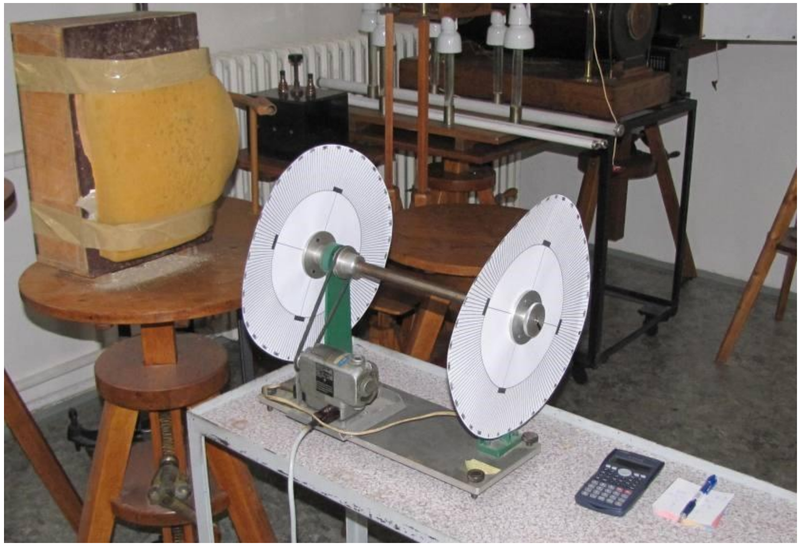
- $t \to s(t)$ parametrizace časem (vhodná pro zkoumání rychlosti)

Rychlost v – 2 významy, zde ve významu „speed“

- skalární veličina
  - údaj na tachometru
  - nezáleží na směru
  - lze i pro uzavřenou trajektorii (křeček v bubínku, dítě na kolotoči)

Experiment: Měření rychlosti střely

- souosé papírové kotouče s úhloměrnými stupnicemi se otáčejí na společném hřídeli
- střela vypálena rovnoběžně s osou
- známe:
  - frekvenci otáčení kotoučů *f=2180 min*$^{-1}$
  - vzdálenost kotoučů *d=40 cm*
- změříme úhlové hodnoty pro oba průstřely
  - $\alpha_1 = 192°$
  - $\alpha_2 = 222°$
- výpočet:
  - doba otáčky kotouče $T = \frac{1}{f}$
  - čas průletu střely mezi kotouči $t = \frac{\Delta\alpha}{360} T$
  - rychlost střely $v = \frac{d}{t}$



Skalární charakteristiky pohybu

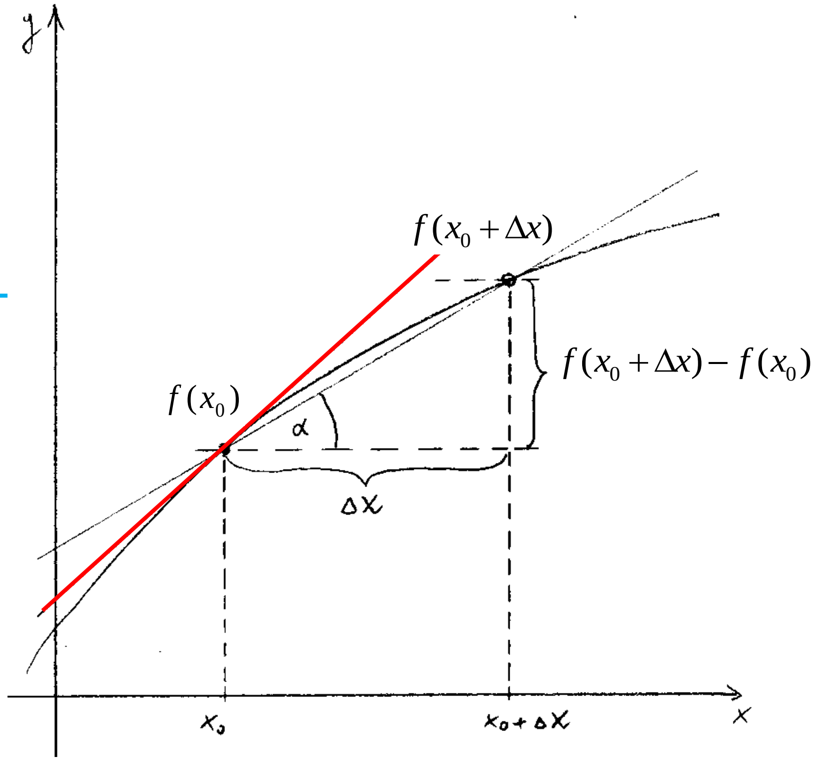
<u>Rychlost *v*</u>

- délka dráhy $\Delta s = s_2 - s_1$ uražené za určitý čas $\Delta t = t_2 - t_1$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

- přesněji: zavedli jsme <u>průměrnou</u> rychlost v intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$
- (měli bychom psát $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$)
- zkracováním intervalu $\Delta t \to 0$ dostaneme <u>okamžitou</u> rychlost
- musíme znát *s* pro všechna *t* neboli dále předpokládáme znalost fce *s*(*t*)
- $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \equiv \frac{ds}{dt}$ (zavedli jsme symbol <u>derivace</u>)

Derivace



Mějme funkci $y=f(x)$ definovanou v bodě x_0.

Derivací rozumíme $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

označujeme $f'(x_0)$.

Podle obrázku výraz $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=tg\,\alpha$

je směrnice sečny.

Limita pro $\Delta x\to 0$ je směrnice tečny v bodě x_0 .

Má-li funkce $f(x)$ derivaci v každém bodě $x\in(a,b)$, říkáme, že má v (a,b) derivaci. Označujeme ji $f'(x), y'(x), \dfrac{df}{dx}, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d}{dx}f(x), \dfrac{d}{dx}y(x), y', f', \left(f(x)\right)'$.

Zjednodušení zápisu v případě, kdy nemůže dojít k omylu $y'=\dfrac{dy}{dx}$, pokud $y=y(x)$. Podobně $\dot{s}=\dfrac{ds}{dt}$, pokud $s=s(t)$. (Toto zavedl I. Newton v díle *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)

Skalární charakteristiky pohybu

Rychlost $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \equiv \frac{ds}{dt}$ lze zapsat ve tvaru $v = \dot{s}$, přesněji $v(t) = \dot{s}(t)$

<u>Rovnoměrný pohyb</u> $v = \dot{s} = \mathrm{konst}$

nezáleží na směru pohybu

příkladem může být pohyb po kružnici s konstantní úhlovou rychlostí

vs.

<u>Nerovnoměrný pohyb</u> $v = \dot{s} \neq \mathrm{konst}$

opačná úloha k derivování – hledání primitivní funkce

známe $v(t)$ a chceme znát $s(t)$: $s(t) = \int v(t)dt$

Primitivní funkce (neurčitý integrál)

Funkce $F(x)$ je v intervalu (a,b) primitivní funkce k funkci $f(x)$, jestliže pro $\forall x \in (a,b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Víme, že $\left.\begin{array}{r} C' = 0 \Leftrightarrow C = \text{konst} \\ (f+g)' = f' + g' \end{array}\right\}$ $\quad \left(F(x)+C\right)' = F'(x) + \underbrace{C'}_{=0} = F'(x) = f(x)$

To znamená, že pokud $F(x)$ je primitivní funkce $\Rightarrow$ $F(x)+C$ je také primitivní funkce.

Symbolický zápis: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Skalární charakteristiky pohybu

<u>Zrychlení *a*</u>

zkoumáme změnu rychlosti v čase

- změna rychlosti $\Delta v = v_2 - v_1$ dosažená za určitý čas $\Delta t = t_2 - t_1$
- $$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$
- analogicky jde o <u>průměrné</u> zrychlení v intervalu $t_1 \le t \le t_2$
- (měli bychom psát $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$)
- okamžité zrychlení zavedeme derivací
- $$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

$$s \underset{\xleftarrow{\quad}}{\overset{\text{derivace}}{\xrightarrow{\quad}}}_{\text{primitivní funkce}} v \underset{\xleftarrow{\quad}}{\overset{\text{derivace}}{\xrightarrow{\quad}}}_{\text{primitivní funkce}} a$$

Příklad – pohyb rovnoměrně zrychlený

1) Známe vztah pro dráhu – derivováním vypočteme rychlost

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

Známe derivace:

$$y = x^n \quad \to \quad y' = n x^{n-1}$$

$$y = C \cdot f(x) \quad \to \quad y' = C \cdot f'(x)$$

$$y = f(x) + g(x) \quad \to \quad y' = f'(x) + g'(x)$$

Tedy

$$v = \dot{s}(t) = \dot{\left(\frac{1}{2} a_0 t^2 \right)} + \dot{(v_0 t)} + \dot{s}_0 = \frac{1}{2} a_0 \dot{(t^2)} + v_0 \dot{(t)} + \dot{s}_0 = \frac{1}{2} a_0 2t + v_0 + 0 = a_0 t + v_0$$

2) Známe rychlost – derivováním vypočteme zrychlení

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$a = \dot{v} = \dot{(a_0 t)} + \dot{v}_0 = a_0 \underbrace{\dot{t}}_{=1} + \underbrace{\dot{v}_0}_{=0} = a_0$$

Příklad – pohyb rovnoměrně zrychlený

3) Známe vztah pro rychlost – dráhu vypočteme pomocí primitivní funkce

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

Známe primitivní funkce:

$$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f(x) = C \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad F(x) = C \cdot G(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \rightarrow \quad F(x) = G(x) + H(x)$$

Tedy

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (a_0 t + v_0)dt = a_0 \int t dt + v_0 \int t^0 dt =$$

$$= a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 \frac{t^1}{1} + \underbrace{s_0}_{\text{int.konstanta}} = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

4) Známe zrychlení – rychlost hledáme jako primitivní funkci

$$a = a_0$$

$$v = \int a dt = \int a_0 dt = a_0 \int dt = a_0 \frac{t^1}{1} + \underbrace{v_0}_{\text{int.konstanta}} = a_0 t + v_0$$

Příklad – volný pád

- souřadnicová osa h orientovaná směrem dolů
- všechny vektory – nenulové jen svislé složky
- možno užít skalární vztahy

v čase $t = 0$ $\quad v = 0$

$h = 0$

gravitační zrychlení $\quad a = g$

rychlost $\quad v = \int g dt = gt + v_0 \quad \rightarrow \quad v = gt$

dráha (výška) $\quad h = \int gt dt = g\dfrac{t^2}{2} + h_0 \quad \rightarrow \quad h = g\dfrac{t^2}{2}$

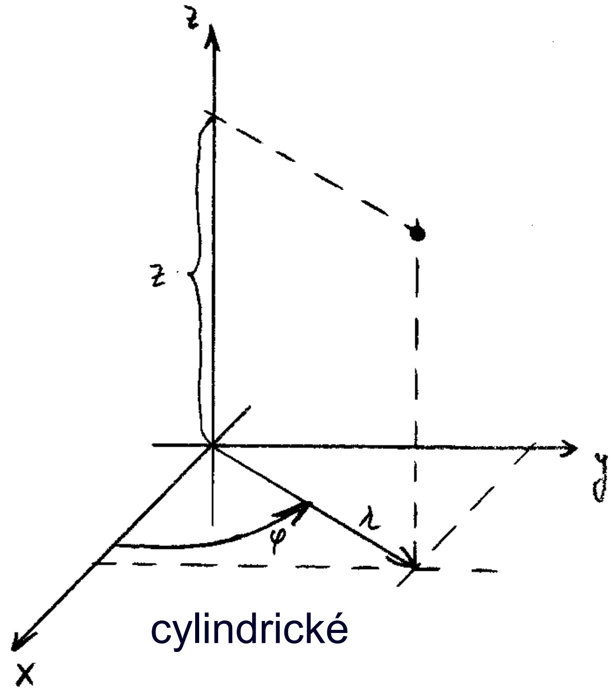
zrychlení v závislosti na výšce a době pádu $\quad g = \dfrac{2h}{t^2}$

vyloučení parametru t $\quad t = \dfrac{v}{g} \quad \rightarrow \quad h = \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{v}{g}\right)^2 = \dfrac{v^2}{2g}$

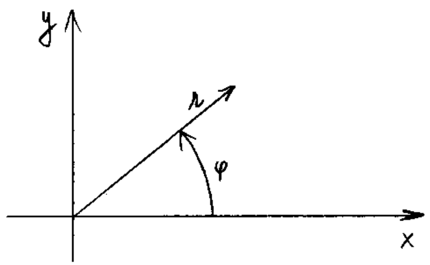
rychlost v závislosti na výšce pádu $\quad v = \sqrt{2gh}$

Souřadnice bodu

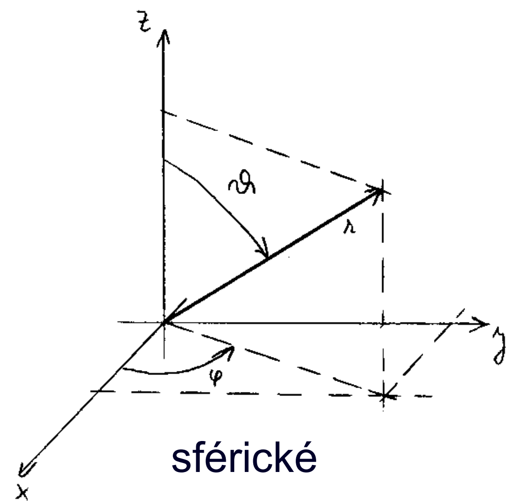
- v třídimenzionálním prostoru
- $[x_1, x_2, x_3]$ nebo $[x, y, z]$
- typy souřadnic v rovině
  - kartézské
  - polární
- typy souřadnic v prostoru
  - kartézské
  - cylindrické
  - sférické



cylindrické

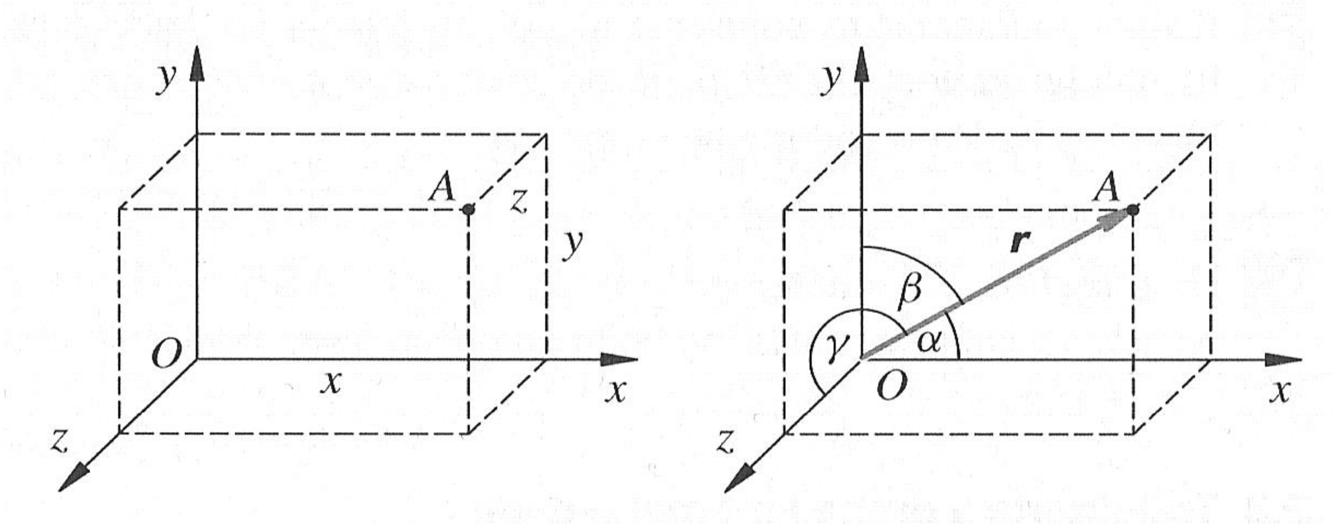


polární



sférické

Směrové kosiny



r ... vzdálenost bodu od počátku kartézských souřadnic

$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\cos\beta$$

$$z = r\cos\gamma$$

často pohodlnější indexované souřadnice a úhly: $x_i = r\cos\alpha_i$

Matice

Reálnou resp. komplexní maticí $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ nazveme obdélníkovou tabulku

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\ldots,n}},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, resp. $a_{ij} \in \mathbb{C}$ nazýváme prvky matice $\mathbf{A}$.

- řádky (sloupce) matice $\mathbf{A}$ jsou vektory z $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^m$) resp. $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}^m$)
- $m \times n$ ... matice $\mathbf{A}$ má *m* řádků a *n* sloupců (množinu takových matic značíme $\mathrm{M}^{m \times n}$)
- $m = n$ ... mluvíme o čtvercové matici $\mathbf{A}$ stupně *n*

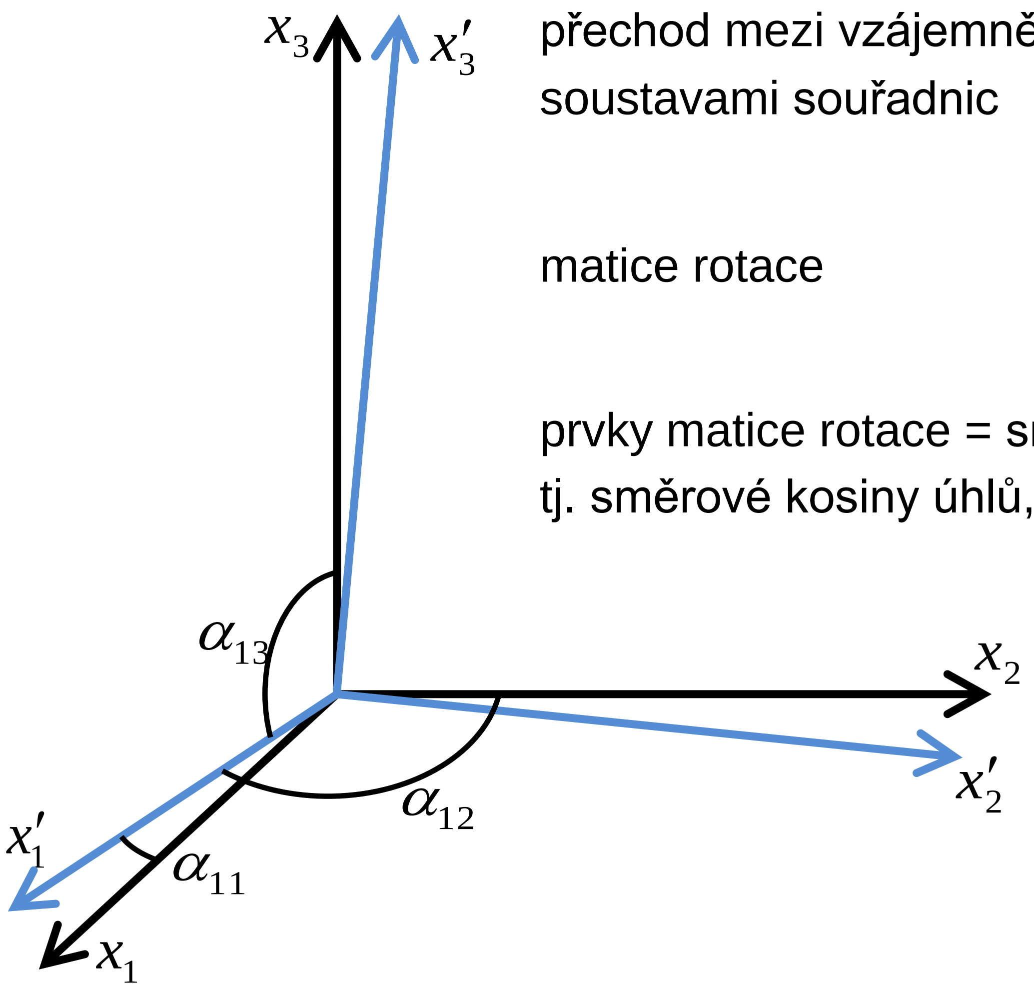
Rovnost matic: Mějme $\mathbf{A} \in \mathrm{M}^{m \times n}$ a $\mathbf{B} \in \mathrm{M}^{r \times s}$. Pak $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ když $m = r$, $n = s$ a $b_{ij} = a_{ij}$

Sčítání (odčítání) matic: Mějme matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathrm{M}^{m \times n}$. Potom $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} : c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

Násobení skalárem: Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathrm{M}^{m \times n}$. Potom $(\alpha \mathbf{A})_{ij} = \alpha a_{ij}$

pro všechna $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

Směrové kosiny transformace



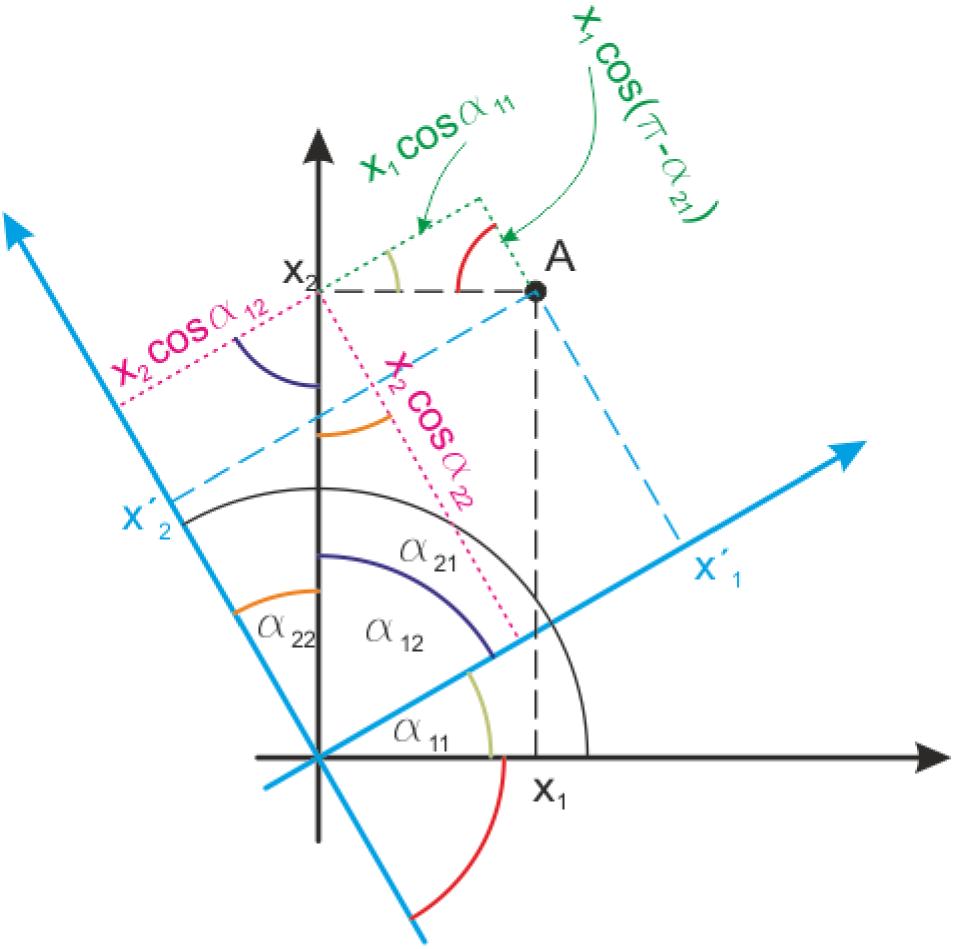
přechod mezi vzájemně pootočenými kartézskými soustavami souřadnic $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_1', x_2', x_3'$

matice rotace $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

prvky matice rotace = směrové kosiny transformace, tj. směrové kosiny úhlů, které svírají osy x_i' s osami x_j

$$a_{ij} = \cos\alpha_{ij}$$

Rotace os v rovině



- přechod mezi vzájemně pootočenými kartézskými soustavami souřadnic $x_1, x_2 \;\rightarrow\; x'_1, x'_2$
- chceme ověřit obecné vztahy pro směrové kosiny (v rovině by pro popis rotace stačil jen jeden úhel)
- podle obrázku platí

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\alpha_{11} + x_2 \cos\alpha_{12} \\ x'_2 &= x_2 \cos\alpha_{22} - x_1 \cos(\pi - \alpha_{21}) \end{aligned}$$

- platí dále $\cos(\pi - \alpha_{21}) = -\cos\alpha_{21}$
- lze zapsat

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\alpha_{11} + x_2 \cos\alpha_{12} \\ x'_2 &= x_1 \cos\alpha_{21} + x_2 \cos\alpha_{22} \end{aligned}$$

- s výhodou zapíšeme jako maticové násobení $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$, kde

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{11} & \cos\alpha_{12} \\ \cos\alpha_{21} & \cos\alpha_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Násobení matic. Násobení matice vektorem

Násobení matic: Mějme matice $\mathbf{A} \in \mathrm{M}^{m\times s}$ a $\mathbf{B} \in \mathrm{M}^{s\times n}$. Matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathrm{M}^{m\times n}$ je definována takto:

$$\mathbf{C} = \left(c_{ij}\right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\ldots,n}}, \qquad \text{kde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} \text{ .}$$

Speciálním případem je násobení matice vektorem: Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathrm{M}^{m\times s}$ a vektor $\mathbf{x} \in \mathrm{M}^{s\times 1}$. Vektor $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathrm{M}^{m\times 1}$ je definován takto:

$$\mathbf{y} = \left(y_i\right)_{i=1,\cdots,m}, \qquad \text{kde } y_i = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} x_k \text{ .}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

Obecná transformace souřadnic
Rotace a translace

přechod mezi kartézskými soustavami souřadnic $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x'_1, x'_2, x'_3$

matice rotace $a_{ij} = \cos\alpha_{ij}$

rotace (přímá) $x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \quad (i = 1,2,3)$

sčítací konvence – přes index, který se vyskytuje v součinu právě dvakrát, se sčítá od 1 do 3 $x'_i = a_{ij} x_j$

translace určena konstantami c'_i $x'_i = x_i + c'_i$

obecná transformace zahrnuje rotaci a translaci:

transformace (přímá) $x'_i = a_{ij} x_j + c'_i$

transformace inverzní $x_j = a_{ij} x'_i + c_j$, kde $c_j = -a_{ij} c'_i$

Poznámky:

- v přímé transformaci se sčítá přes druhý index a_{ij}, v inverzní přes první index!
- pro prvky matice platí **podmínky ortonormality**: $a_{ki} a_{kj} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$ (celkem 9 rovnic)
- Kroneckerův symbol $i = j \rightarrow \delta_{ij} = 1$, $i \neq j \rightarrow \delta_{ij} = 0$

Sčítací konvence a Kroneckerův symbol

Bez sčítací konvence a Kroneckerova symbolu by se podmínky ortonormality

$$a_{ki}a_{kj} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$$

musely zapsat následujícími rovnicemi:

$$a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13} = 1 \qquad (i=1,\ j=1)$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \qquad (i=1,\ j=2)$$
$$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0 \qquad (i=1,\ j=3)$$
$$a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} = 0 \qquad (i=2,\ j=1)$$
$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} = a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{23} = 1 \qquad (i=2,\ j=2)$$
$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 \qquad (i=2,\ j=3)$$
$$a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0 \qquad (i=3,\ j=1)$$
$$a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} = a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} = 0 \qquad (i=3,\ j=2)$$
$$a_{13}a_{13} + a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} = a_{31}a_{31} + a_{32}a_{32} + a_{33}a_{33} = 1 \qquad (i=3,\ j=3)$$

Důkaz platnosti inverzní transformace

transformace (přímá) $x'_i = a_{ij} x_j + c'_i$

transformace inverzní $x_j = a_{ij} x'_i + c_j$, kde $c_j = -a_{ij} c'_i$

podmínky ortonormality: $a_{ki} a_{kj} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$

Platnost rovnice pro inverzní transformaci dokážeme jednoduše dosazením přímé transformace do transformace inverzní.

Vektorové charakteristiky pohybu

vektorový prostor

- definovány operace 1) sčítání
  2) násobení číslem
- výsledek musí patřit do téhož prostoru
- objekty různých typů – vektory, funkce

vektor, vektorová fyzikální veličina

- velikost
- směr
- orientace

Typy vektorů ve fyzice

volný vektor

- **velikost, směr a orientace**

vázaný (umístěný) vektor

- dvě části:
  - **volný vektor**
  - bod v prostoru obecně zvaný **umístění** (v konkrétních případech **působiště**, **referenční bod** apod.)
- pro popis síly, určení hodnot nehomogenního vektorového pole,...

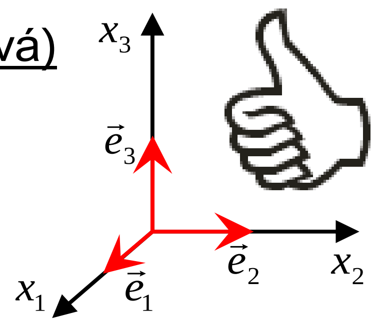
klouzavý vektor

- třída ekvivalentních vázaných vektorů se stejným volným vektorem, jejichž působiště leží kdekoli na přímce určené působištěm a směrem reprezentujícího vázaného vektoru
- nejčastěji popisuje sílu působící na tuhé těleso

Souřadnice vektoru

kartézská soustava souřadnic

- jednotkové směrové vektory ve směrech os $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
- souřadnicové osy vzájemně kolmé – vektory $\vec{e}_i$ ortonormální, tj. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
- ortonormální báze (pravotočivá)



vektory

- „orientované úsečky“ $\rightarrow$ souřadnice vektoru $A_i = x_i^{\text{konec}} - x_i^{\text{počátek}}$
- vektory $A_1\vec{e}_1, A_2\vec{e}_2, A_3\vec{e}_3$ označujeme složky vektoru
- vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ – lineární kombinace směrových vektorů

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 = A_i\vec{e}_i$$

- nositelem fyzikální jednotky vektoru je souřadnice

Operace s vektory – vlastnosti báze

- vektorové veličiny $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$
- souřadnice vektorů v kartézské soustavě souřadnic A_i, B_i, C_i
- skalární součin vektorů ortonormální báze $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
- Kroneckerův symbol

(Leopold Kronecker 1823-1891 Německo)

$$\begin{matrix} i = j \\ i \neq j \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \delta_{ij} = 1 \\ \delta_{ij} = 0 \end{matrix}$$

- vektorový součin vektorů báze $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$

(platí stejně v pravotočivé i levotočivé soustavě, orientace součinu se určí podle pravidla patřičné ruky)

- Levi-Civitův symbol

$$\begin{matrix} \text{sudá permutace} \\ \text{lichá permutace} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \varepsilon_{ijk} = +1 \\ \varepsilon_{ijk} = -1 \end{matrix}$$

$$(i = j) \vee (i = k) \vee (j = k) \rightarrow \varepsilon_{ijk} = 0$$

(Tullio Levi-Civita 1873-1941 Itálie)

Operace s vektory – sčítání a násobení

- operandy $\vec{A} = A_i \vec{e}_i \;,\; \vec{B} = B_j \vec{e}_j$
- sčítání $\vec{A} + \vec{B} = A_i \vec{e}_i + B_j \vec{e}_j = (A_i + B_i)\vec{e}_i$
- násobení skalárem $k\vec{A} = k(A_i \vec{e}_i) = (kA_i)\vec{e}_i$
- násobení vektorů
    - skalární součin
      $$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \vec{e}_i \cdot B_j \vec{e}_j = A_i B_j \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}_{\delta_{ij}} = A_i B_i =$$
      $$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$
    - vektorový součin
      $$\vec{A} \times \vec{B} = A_i \vec{e}_i \times B_j \vec{e}_j = AB_j \underbrace{(\vec{e}_i \times \vec{e}_j)}_{\varepsilon_{ijk} \vec{e}_k} = \varepsilon_{ijk} A_i B_j \vec{e}_k =$$
      $$\left(A_2 B_3 - A_3 B_2\right)\vec{e}_1 + \left(A_3 B_1 - A_3 B_1\right)\vec{e}_2 + \left(A_1 B_2 - A_2 B_1\right)\vec{e}_3$$

Transformace vektoru

přechod mezi kartézskými soustavami souřadnic $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x'_1, x'_2, x'_3$

souřadnice vektoru $A_1, A_2, A_3 \rightarrow A'_1, A'_2, A'_3$

souřadnice se při pouhé translaci nemění $\Rightarrow$ uvažujeme jen rotace

matice rotace $a_{ij} = \cos\alpha_{ij}$

transformace přímá $A'_i = a_{ij} A_j$

transformace inverzní $A_j = a_{ij} A'_i$

<u>Vektory musí při transformaci zachovat velikost</u> $A'_i A'_i = a_{ij} A_j \; a_{ik} A_k = \underbrace{a_{ij} a_{ik}}_{\delta_{jk}} A_j A_k = A_j A_j$

splněno díky podmínkám ortonormality ($a_{ki} a_{kj} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$)

Poznámky:

- v přímé transformaci se sčítá přes druhý index a_{ij} , v inverzní přes první index
- běžné zjednodušení: vektory různých veličin znázorňujeme do „stejné“ kartézské s.s. → společné směrové vektory, osy vždy „cejchovány“ v příslušných jednotkách

Polohový vektor

- kartézská soustava souřadnic, osy jsou „cejchované“ v délkových jednotkách
- souřadnice bodu *P* v prostoru x_1, x_2, x_3
- souřadnice referenčního bodu *Q* x_{Q1}, x_{Q2}, x_{Q3}
- spojnice referenčního bodu *Q* s bodem *P* $\rightarrow$ vázaný vektor umístěný v referenčním bodu $\vec{r}_Q = (x_1 - x_{Q1})\vec{e}_1 + (x_2 - x_{Q2})\vec{e}_2 + (x_3 - x_{Q3})\vec{e}_3 = (x_i - x_{Qi})\vec{e}_i$
- umístíme-li do referenčního bodu *Q* počátek *O* vztažné soustavy $\rightarrow$ vázaný vektor umístěný v počátku $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_i\vec{e}_i$
- <u>polohový vektor (radius vektor)</u> $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ užíváme pro popis relativní polohy bodu *P* v prostoru vzhledem k počátku vztažné soustavy
- při přemístění referenčního bodu *Q* do počátku jiné soustavy souřadnic *O’* obdržíme jinou sadu polohových vektorů, tentokrát vázaných na bod *O’*

Parametrizace vektorů

<u>Parametrizace polohy</u>

$t \to x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ parametrizace časem

(vhodná pro zkoumání rychlosti)

$\vec{r}(t) = x_i(t)\vec{e}_i$

$s \to x_1(s), x_2(s), x_3(s)$ parametrizace dráhou

(vhodná např. pro zkoumání tvaru trajektorie)

$\vec{r}(s) = x_i(s)\vec{e}_i$

<u>Vyloučení parametru</u>

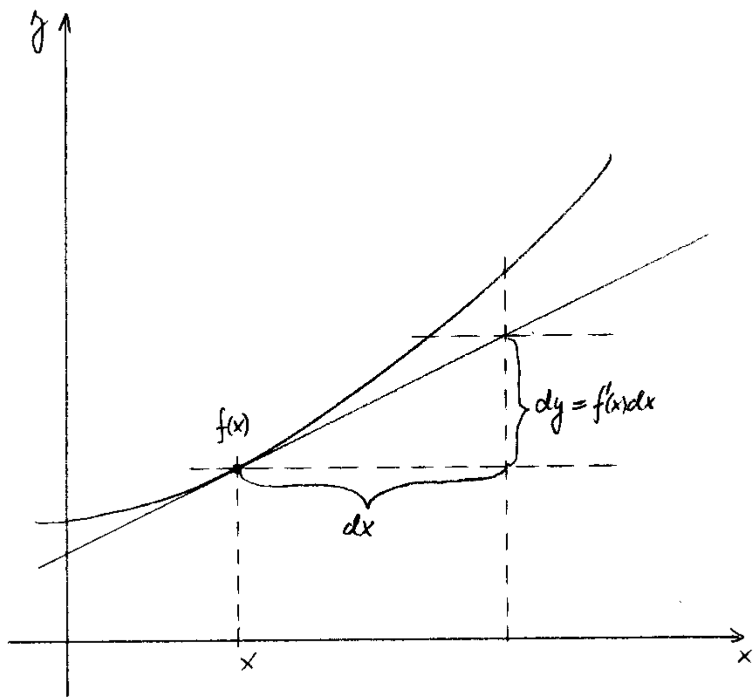
získáme rovnici dráhy (trajektorie)

$x_1 = x_1(t) \to t = t(x_1) \to x_1, x_2(x_1), x_3(x_1)$

Diferenciál funkce

Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x je $dy \equiv df(x) = f'(x)dx$, kde dx je (infinitezimální) přírůstek nezávisle proměnné; analogicky ho nazýváme diferenciálem nezávisle proměnné.

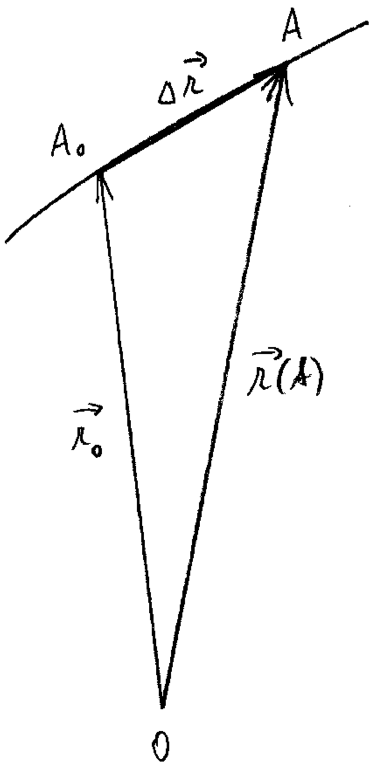
Symbol pro označení derivace vychází z toho, že derivace skutečně je podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné ($dx \neq 0$)



Vektorová veličina analogická k *s*(*t*)

dráha *s* $\rightarrow$ polohový vektor $\vec{r}(t) = x_i(t)\vec{e}_i$

$$\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)$$



Alternativní postup:
Dráhu *s* chápeme jako vzdálenost mezi body A_0 a A.

Pak analogickou vektorovou veličinu představuje změna polohového vektoru $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$.

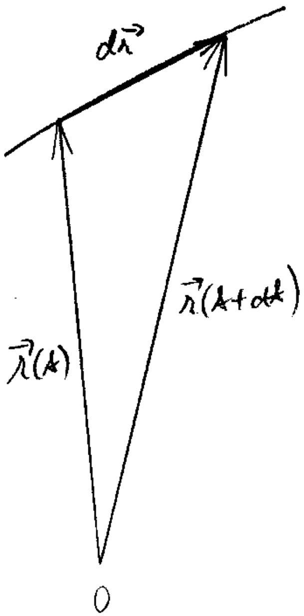
Výhoda:
Změna polohového vektoru nezávisí na volbě referenčního bodu.

Vektorové veličiny analogické k *v*(*t*) a *a*(*t*)

rychlost *v* $\rightarrow$ <u>(vektorová) rychlost</u> $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}_i(t)\vec{e}_i$ $\left(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)\right)$
ve významu „velocity“

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt}$$

Platí $\begin{matrix} d\vec{r} = \vec{v}dt \\ d\vec{r} \parallel \vec{v} \end{matrix}$ a naopak neplatí $d\vec{r} \parallel \vec{r}$!



Alternativní postup: Zároveň platí $\vec{v}(t) = \dot{\Delta\vec{r}}(t)$, protože

$$\dot{\Delta\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t) - \vec{r}_0\right) = \frac{d}{dt}\left(x_i(t)\vec{e}_i - \vec{r}_0\right) = \dot{x}_i(t)\vec{e}_i = \dot{\vec{r}}(t)$$

zrychlení *a* $\rightarrow$ <u>(vektorové) zrychlení</u> $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}_i(t)\vec{e}_i$ $\left(\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t)\right)$

Pravidla pro derivace

derivace složené funkce $\frac{d}{dx}\left(f\left(g(x)\right)\right) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

derivace součinu funkcí (Leibniz) $\left(fg\right)' = f'\,g + f\;g'$

analogicky pro diferenciály $d\left(fg\right) = g\;df + f\;dg$

Vztah vektorové a skalární rychlosti

Uvažujeme $\vec{r} = \vec{r}(s)$ a $s = s(t)$, tedy jako složenou funkci $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$

Vektorovou rychlost vyjádříme jako derivaci složené funkce

$$\vec{v}(s(t)) = \frac{d}{dt}\vec{r}\left(s(t)\right) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds(t)}{dt}$$, kde

- $\dfrac{ds(t)}{dt} = v(t)$ ... velikost rychlosti (skalární rychlost)
- $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \dfrac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \vec{\tau}$ ... tečný vektor trajektorie (anglicky tangent vector)
  - jednotkový vektor $|\vec{\tau}| = 1$
  - $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \Rightarrow d\vec{r} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{\tau} \parallel \vec{v}$

Závěr: $\vec{v}(t) = \vec{\tau} \cdot v(t)$

Vztah vektorového a skalárního zrychlení

Uvažujme obecný nerovnoměrný křivočarý pohyb: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

Zaveďme parametrizaci $\vec{\tau}(s(t))$, pak $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}v$

Vektorové zrychlení lze rozdělit na dvě složky: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}$

$\vec{a}_1 = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ ve směru tečného vektoru;

velikost je rovna skalárnímu zrychlení $\frac{dv}{dt}$

$\vec{a}_2 = v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ dále budeme zkoumat souvislost této složky s parametry pohybu

Vlastnosti vektoru $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$

$|\vec{\tau}| = 1 \Rightarrow \vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1$

derivace konstanty $\quad \dfrac{d}{ds}(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}) = 0$

derivace součinu funkcí $\quad \dfrac{d}{ds}(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}) = \left(\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\vec{\tau} + \vec{\tau}\cdot\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\right) = 2\vec{\tau}\cdot\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$

$\Rightarrow \quad \vec{\tau}\cdot\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$, resp. $\vec{\tau}\cdot d\vec{\tau} = 0$

Splněno ve dvou případech:

1) $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \rightarrow \vec{\tau} = \mathrm{konst}$ (přímočarý pohyb)

2) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau} \\ d\vec{\tau} \perp \vec{\tau} \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ vektor $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$, resp. $d\vec{\tau}$ kolmý ke směru rychlosti

(obecný křivočarý pohyb)

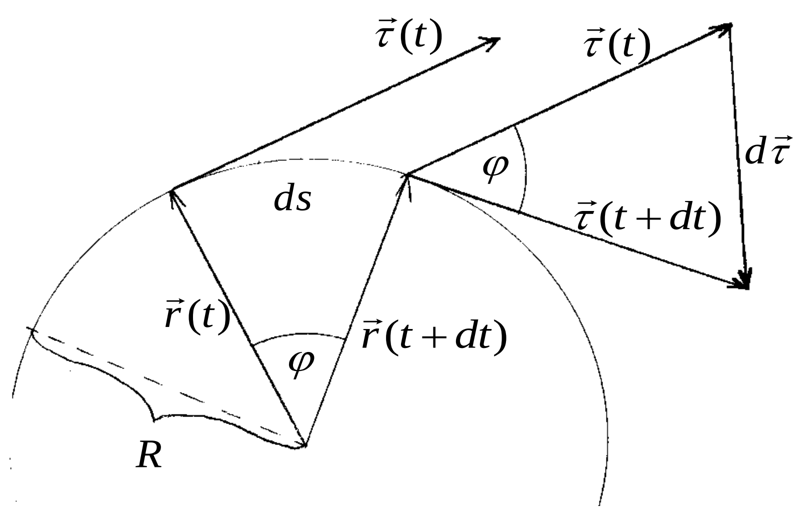
Křivočarý pohyb v rovině

Ukážeme, že vektor $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ směřuje do středu okamžitého oblouku a velikost tohoto vektoru je svázána s poloměrem okamžitého oblouku.

Rovina pohybu (oskulační r.) určena vektory $\vec{\tau}(t)$ a $d\vec{\tau}$. Ukázali jsme, že $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$.

Zavedeme tzv. <u>normálový vektor</u> $\vec{n} \equiv \frac{d\vec{\tau}}{|d\vec{\tau}|}$. Musí platit $|\vec{n}|=1$.

Platí: $\vec{n} \parallel d\vec{\tau}$, $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ Vektor $\vec{n}$ leží v rovině pohybu.



V obrázku vidíme podobné trojúhelníky, proto $\frac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{|\vec{\tau}|}{R}$. Pak $|\vec{\tau}|=1 \rightarrow \frac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{1}{R}$

Vynásobíme obě strany vektorem $\vec{n}$ a dostaneme $\frac{\vec{n}\,|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$.

Křivost trajektorie

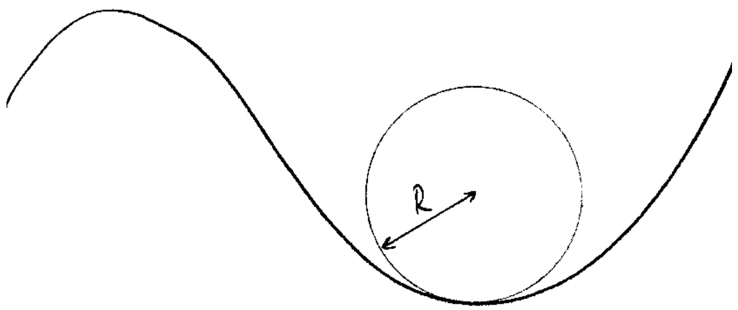
Pro <u>křivočarý pohyb v rovině</u> jsme odvodili $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$.

Vektor $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ tedy je kolmý k okamžité rychlosti a má velikost $\frac{1}{R}$, kde R je poloměr okamžitého oblouku (oskulační kružnice).

Veličina $\kappa = \frac{1}{R}$ se nazývá křivost křivky (v daném bodě).

V rovině mají konstantní křivost

- přímka $(\kappa = 0)$
- kružnice $(\kappa = \frac{1}{r})$



V případě <u>prostorového pohybu</u> lze každým bodem trajektorie proložit rovinu okamžitého pohybu, takže v každém okamžiku lze obecný křivočarý pohyb popsat jako pohyb v rovině (která se s časem mění).

Vztah vektorového a skalárního zrychlení (2)

Vektorové zrychlení jsme rozdělili na dvě složky: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{\tau}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{v^2 \frac{\vec{n}}{R}}_{\vec{a}_n}$

$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ ve směru tečného vektoru (teď už víme, že je to celá tečná složka);

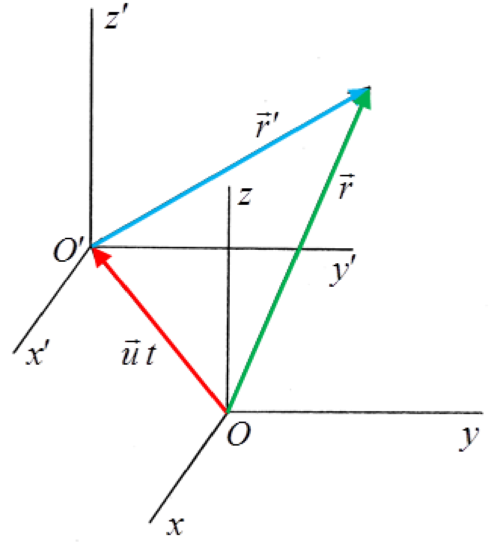
velikost je rovna skalárnímu zrychlení $\frac{dv}{dt}$

$\vec{a}_n = v^2 \frac{\vec{n}}{R}$ ve směru normálového vektoru (normálová složka), který směřuje do středu okamžitého oblouku dráhy poloměru R (oskulační kružnice; její střed i poloměr R se v případě obecného křivočarého pohybu můžou neustále měnit)

Propojení geometrie a fyziky v dopravních stavbách: Správné zatáčky se skládají z oblouků tzv. klotoidy (křivka s lineární změnou křivosti), kde při průjezdu stálou rychlostí normálové zrychlení rovnoměrně narůstá a zase klesá.

Axiom skládání rychlostí

- klasický axiom předpokládá lineární skládání rychlostí nezávisle na pohybu těles
- vychází z pozorování Galileiho a Newtona
- byl jedním z východisek pro postulování absolutního prostoru a času
- axiom je v souladu s dříve zavedenými transformačními vztahy:



- vztažná soustava O' se pohybuje rychlostí $\vec{u}$ vzhledem k soustavě O — $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}t$
- vzhledem k O rychlost pohybu tělesa $\vec{v}$ — $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$
- vzhledem k O' rychlost pohybu tělesa $\vec{v}\,'$ — $\vec{r}\,' = \vec{r}_0\,' + \vec{v}\,'t$
- dosazením (tzv. **Galileiho transformace**) — $\vec{r}_0 + \vec{v}t = \vec{r}_0\,' + \vec{v}\,'t + \vec{u}t$
- vztah mezi rychlostmi (derivováním) — $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$

Příklady pohybů v prostoru

obecný křivočarý pohyb v prostoru

- 3 parametrické rovnice

rovinný pohyb v prostoru

- 2 parametrické rovnice
- (při vhodné volbě soustavy souřadnic)

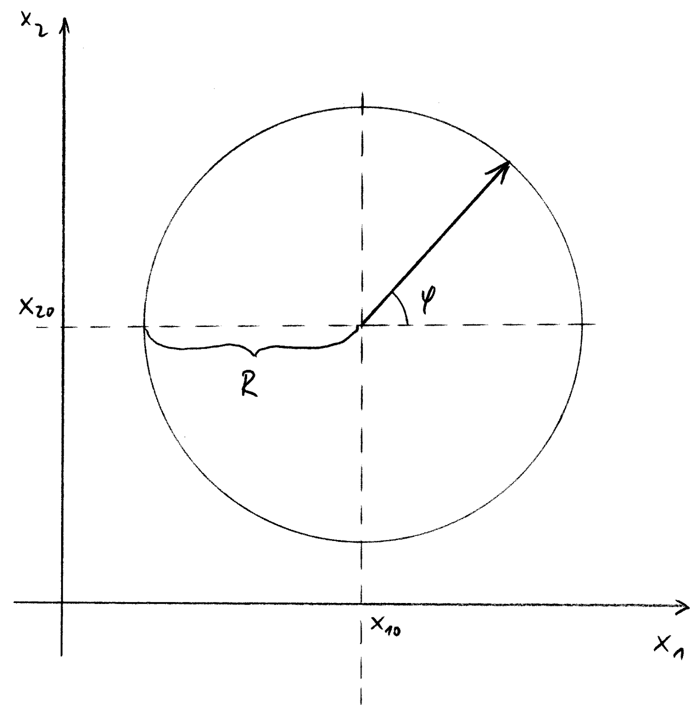
přímočarý pohyb v prostoru

- 1 parametrická rovnice
- (při vhodné volbě soustavy souřadnic)

Rovnoměrný kruhový pohyb

$$x_1 = R\cos(\omega t + \alpha) + x_{10}$$

$$x_2 = R\sin(\omega t + \alpha) + x_{20}$$



R	...	poloměr dráhy
α	...	počáteční fáze
x_{10}, x_{20}	...	souřadnice středu

$f = \dfrac{1}{T}$ ... frekvence a oběžná doba (perioda)

$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ ... úhlová (kruhová) frekvence

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ ... další vztahy

Rovnoměrný kruhový pohyb

rovnice trajektorie (vyloučení času):

$$x_1 - x_{10} = R\cos(\omega t + \alpha)$$

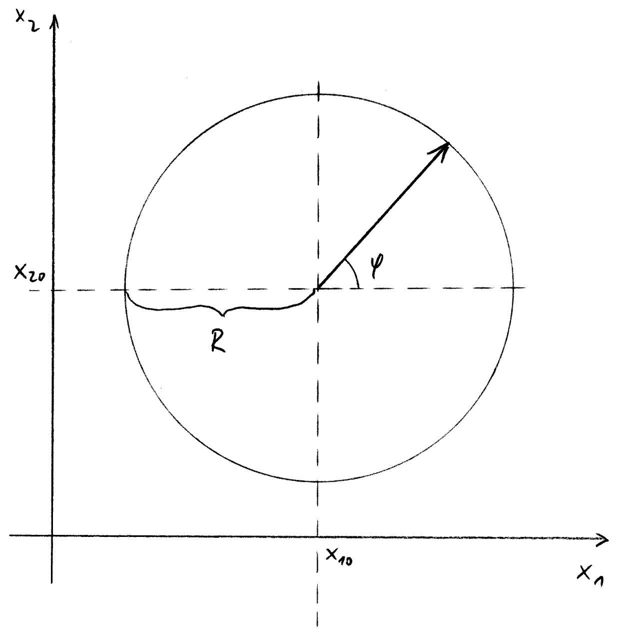
$$x_2 - x_{20} = R\sin(\omega t + \alpha)$$

$$(x_1 - x_{10})^2 = R^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

$$(x_2 - x_{20})^2 = R^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 = R^2 \underbrace{\left(\cos^2(\omega t + \alpha) + \sin^2(\omega t + \alpha)\right)}_{1}$$

$$(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 = R^2$$



Rovnoměrný kruhový pohyb

rychlost:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_1 = -R\omega\sin(\omega t+\alpha) \\ v_2 &= \dot{x}_2 = R\omega\cos(\omega t+\alpha) \end{aligned}\right\} |v| = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = R\omega\underbrace{\sqrt{\sin^2(\omega t+\alpha)+\cos^2(\omega t+\alpha)}}_{1}$$

$$|v| = R\omega$$

vektor ve směru pohybu $\Rightarrow$ <u>obvodová rychlost</u>

zrychlení:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \ddot{x}_1 = -R\omega^2\cos(\omega t+\alpha) \\ a_2 &= \ddot{x}_2 = -R\omega^2\sin(\omega t+\alpha) \end{aligned}\right\} |a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2} = R\omega^2\underbrace{\sqrt{\cos^2(\omega t+\alpha)+\sin^2(\omega t+\alpha)}}_{1}$$

$$|a| = R\omega^2 = |v|\,\omega = \frac{|v|^2}{R}$$

vektor míří do středu otáčení $\Rightarrow$ <u>dostředivé zrychlení</u>

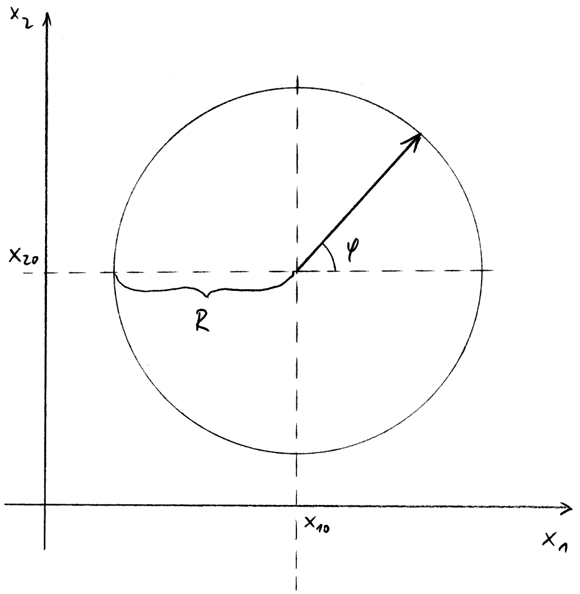
Nerovnoměrný kruhový pohyb

$$x_1 = R\cos\varphi(t) + x_{10}$$
$$x_2 = R\sin\varphi(t) + x_{20}$$

R ... poloměr dráhy

$\varphi(t)$ ... časově proměnný fázový úhel

x_{10}, x_{20} ... souřadnice středu



Harmonický pohyb

průmět rotačního pohybu do 1D $x = A\sin(\omega t + \alpha) + x_0$

A	...	amplituda
ω	...	kruhová (úhlová) frekvence
α	...	počáteční fáze
x_0	...	výchozí poloha
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	...	perioda (oběžná doba)
$f = \frac{1}{T}$	...	frekvence
$f = \frac{\omega}{2\pi}$	...	frekvence

rychlost a zrychlení:

$$v = \dot{x} = \omega A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 \underbrace{A\sin(\omega t + \alpha)}_{x - x_0} = -\omega^2 (x - x_0)$$ ... zrychlení úměrné výchylce

Zavedení „úhlových“ vektorů

průvodič $\vec{R}$ leží v rovině rotace hmotného bodu a míří ze středu rotace k h.b.

2D: $\vec{R} = (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})$

3D: výhodnější uvažovat polohu h.b. vzhledem k pevnému bodu na ose otáčení

- polohové vektory jednotlivých h.b. opisují kužele se společným vrcholem
- průvodič jednotlivého h.b. je průmět polohového vektoru do roviny rotace h.b.

úhlové otočení $\Delta\varphi$ = úhel, který svírají dva různé průvodiče pohybujícího se bodu

úhlová dráha φ = úhel, který svírají aktuální průvodič a jeho výchozí poloha

vektor (úhlového) otočení $\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{o}$, kde $\vec{o}$ je jednotkový vektor ve směru osy otáčení; orientace závisí na točivosti použité báze – pokud bod rotuje v kladném smyslu ve vodorovné rovině, bude v pravotočivé soustavě vektor $\vec{o}$ směřovat vzhůru (pravidlo pravé ruky)

Vektory úhlové rychlosti a úhlového zrychlení

vektor úhlové rychlosti

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{o} = \omega \cdot \vec{o}$$

vektor úhlového zrychlení

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \vec{o} = \varepsilon \cdot \vec{o}$$

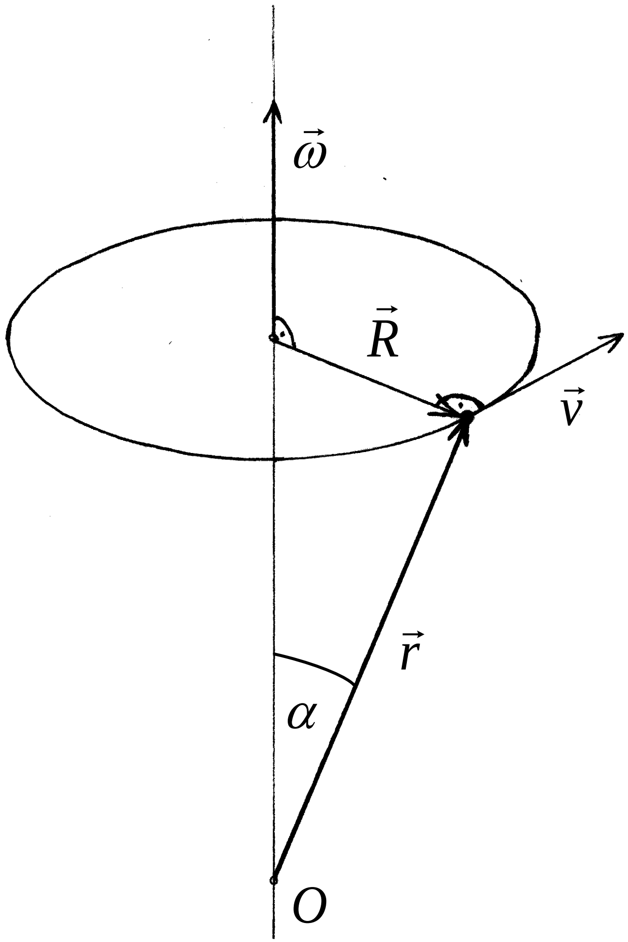
víme: $s = R\varphi \rightarrow ds = Rd\varphi \rightarrow \dfrac{ds}{dt} = R\dfrac{d\varphi}{dt} \rightarrow$

$$v = R\omega \rightarrow |\vec{v}| = |\vec{R}| \cdot |\vec{\omega}|$$

podle obrázku: $|\vec{R}| = |\vec{r}| \sin\alpha \rightarrow$

$$|\vec{v}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{\omega}| \sin\alpha \rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

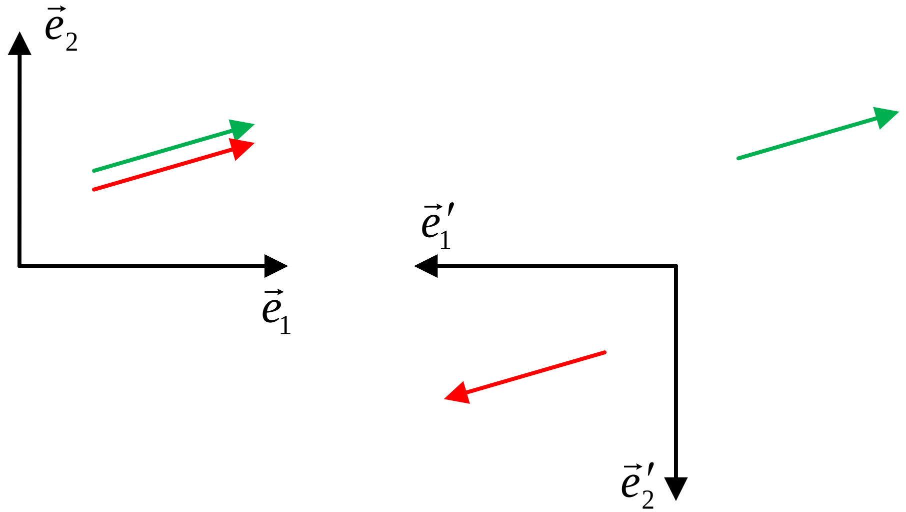
(pořadí činitelů v souladu s pravidlem pravé ruky)



Polární a axiální vektory

při zrcadlení souřadnic: 1) $\vec{e}_i' = -\vec{e}_i$

2) pravotočivá s.s. $\rightarrow$ levotočivá s.s.



polární (pravý) vektor

$$\vec{A} = a_i \vec{e}_i \quad \rightarrow \quad \vec{A}' = \underbrace{-a_i}_{a_i'} \vec{e}_i' \quad \rightarrow \quad \vec{A}' = -\vec{A}$$

- změní znaménko
- zůstane na místě
- skutečná fyzikální veličina

vektorový součin 2 polárních vektorů:

axiální vektor (pseudovektor)

$$\vec{A}' \times \vec{B}' = (-a_i \vec{e}_i') \times (-b_j \vec{e}_j') = (a_i \vec{e}_i) \times (b_j \vec{e}_j) = \vec{A} \times \vec{B}$$

- nemění znaménko
- zrcadlí se
- není skutečná fyzikální veličina

Užití vektoru úhlové rychlosti

Rekapitulace vztahů: $s = R\varphi$

$$ds = Rd\varphi \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{R}$$

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{R}$$

$$v = R\omega \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{r}|\sin\alpha|\vec{\omega}| \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = |\vec{r}|\sin\alpha|\vec{\omega}|\vec{\tau} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Vypočtěme zrychlení působící na h.b. při rovnoměrné rotaci. Derivujeme rychlost:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\varepsilon}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}_n}$$

$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ ... $\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) \parallel (\vec{\omega} \times \vec{r}) \Rightarrow \vec{a}_t \parallel \vec{v}$ ... tečná složka zrychlení

$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$ ... $\vec{a}_n \perp \vec{\omega}, \vec{a}_n \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a}_n \parallel \vec{R}$ ... normálová složka zrychlení

$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ... normálová složka míří proti průvodiči (dostředivé zrychlení)

Výpočet zrychlení rotačního pohybu

Použití vektorů úhlové rychlosti a úhlového zrychlení spolu s vektorovým násobením vede na kompaktní zápis:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{\underbrace{dt}_{\vec{\varepsilon}}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{\underbrace{dt}_{\vec{v}}} = \underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\vec{a}_n}$$

Porovnejme s výsledkem alternativního postupu:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{\tau}\right) = \frac{d}{dt}\left(R\omega\vec{\tau}\right) = R\frac{d\omega}{\underbrace{dt}_{\varepsilon}}\vec{\tau} + R\omega\underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}} = R\varepsilon\vec{\tau} + R\omega\underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{ds}}_{\frac{\vec{n}}{R}}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{R\omega} = \underbrace{R\varepsilon\vec{\tau}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{R\omega^2\vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

Pro odstranění proměnné R (délka průvodiče) poslouží vztahy

$$\vec{a}_t = R\varepsilon\vec{\tau} = \underbrace{|\vec{r}|\sin\alpha|\vec{\varepsilon}|}_{|\vec{\varepsilon}\times\vec{r}|}\vec{\tau}$$

$$\vec{a}_n = R\omega^2\vec{n} = \underbrace{|\vec{r}|\sin\alpha|\vec{\omega}|}_{|\vec{\omega}\times\vec{r}|}\cdot|\vec{\omega}|\vec{n} = \underbrace{|\vec{r}|\sin\alpha|\vec{\omega}|\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1}|\vec{\omega}|}_{|\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})|}\vec{n}$$